N. 238
43234
D3

BURNDY
LIBRARY
Chartered in 1941

GIFT OF
BERN DIBNER

Elementa Geometriae tum Planae, tum Solidae,

a Joanne Camera Plumbinensi

Senis Studiorum causa commorante,

exarata, atque ab admodum R.do D.no Josepho Fontani S.ae Theologiae Doctore explicata.

A. D. 1786.

Elementa Geometriae Planae

Pars Prior.

Caput I.

De principiis Geometriae.

Definitio I.

1. Geometria eſt Scientia extenſorum quatenus terminata ſunt, hoc eſt, Linearum, Superficierum, et Solidorum.

Scholion.

2. Quemadmodum extenſio ex ſimultanea alicujus rei per locum diffuſione oritur; ita in Mente repraeſentatur, dum multa in uno continuo ſimul percipimus. Hinc nobis extenſionis

ſtionis non modo totius ac partium notiones involvit (§. 9. Arith.). Sed eadem in rerum aliarum notiones ineſt, quae ideo per lineas, ſuperficies, ac ſolida repræſentari poſſunt. Unde eſt, quod Geometria rebus plurimis applicari poſſit, ejusque adeo quam latiſſime pateat uſus.

Definitio II.

3. Congruere dicuntur, quorum iidem termini eſſe poſſunt. Nempe Congruentia eſt coincidentia terminorum.

Scholion.

4. Ne definitio negotium faceſſat, vitanda eſt vocis termini aequivocatio: idquod in ſequentibus ſatis cavetur. A termini vero definitione conſulto abſtinemus, ne ad demonſtrationes metaphiſicas dilabamur.

Definitio

DSI

Definitio III.

5. Eundem situm habere dicuntur, inter quae idem extensum poni poteſt.

Definitio IV.

6. Punctum eſt, quod quaquaversum seipſum terminat, seu quod non habet terminos alios a ſe diſtinctos.

Corollarium I.

7. Ergo omne punctum alteri cuicunque congruit (§. 3).

Corollarium II.

8. Nec ullas in in eo diſtinguere licet partes.

Scholion.

9. Hinc Euclides: Punctum eſt inquit, cujus pars nulla eſt. Nec sine ratione punctum ut individuum concipiunt Geometrae, utut tale quid nec imaginari, nec pingere valeamus. In praxi enim ipſa Geometrica summo cum Studio caven-

dum

dium, ne paneatum pars lineae habeatur, cujus terminus existit.

Definitio V.

10. Linea describitur, si punctum ab uno puncto A ad alterum B moveatur. Tabula I. Figura I.

Corollarium I.

11. Termini igitur lineae secundum Longitudinem sunt puncta A et B, secundum Latitudinem, et profunditatem ipsa cui terminus est (§. 6).

Corollarium II.

12. Quoniam punctum partes nullas habet (§. 8), linea nec Lata, nec profunda esse potest, sed in solam Longitudinem extenditur.

Scholion I.

13. Quid ergo mirum, quod secundum latitudinem, et profunditatem non habeat terminos a se distinctos, vide 6. (§. 11).

Scholion

MSS 266B
RB NMAH

Scholion II.

14. Quamvis corpus omne tribus dimensionibus praeditum sit, nec una a reliquis actu separari queat, necessarium tamen, ac perutile est ut unam absque reliquis consideremus. Necessitatem intellectus finitudo injungit, qui ad multa una diffundi nequit, et hinc per abstractionem divellere tenetur, quae nexu indivulso natura conjunxit. Utilitatem hujus abstractionis casus innumeri persuadent, in quibus unam dimensionem neglectis ceteris cognoscere jubemur e: gr: Altitudinem Turris sine Latitudine ac profunditate ipsius, Latitudinem fluminis sine longitudine ac profunditate ejusdem

Definitio VI.

15. Distantia est linea brevissima inter duo.

Scholion.

Scholion.

16. Ita v: gr: Diſtantia arboris a Domo eſt linea breviſſima, quae ab illa ad hanc duci poteſt.

Definitio VII.

17. Linea recta AB eſt cujus pars quaecunque eſt toti ſimilis. Tab: I. Fig: 1.

Corollarium I.

18. Lineae igitur rectae non differunt niſi quantitate. (§. 10 Arith.)

Corollarium II.

19. Cum lineae deſcribantur ſi punctum ab uno puncto ad alterum movetur, (§. 10) Motus puncti deſcribentis in omnibus lineae partibus idem eſſe debet: Secus enim diverſitate hujus motus partes a ſe invicem diſtinguerentur adeoque ſimiles non forent (§. 24 Arith.) contra definitionem (§. 17). Quoniam itaque motus

motus puncti differre nequit niſi celeritate, ac directione, celeritas vero ad deſcriptionem rectae nil confert; ſola directionis habenda eſt ratio, conſequenter recta deſcribitur ſi punctum ab uno puncto A ad alterum B eadē directione movetur.

Poſtulatum I.

Tab: I. F: 1. 20. A quovis puncto A ad quodvis punctum B poſse duci lineam rectam.

Poſtulatum II.

21. Lineam rectam terminatam AB utrinque produci poſse.

Definitio VIII.

22. Linea curva eſt, cujus partes toti diſſimiles.

Definitio IX.

23. Metiri idem eſt ac quantitatem aliquam pro unitate aſſumere, ac aliarum homogenearum rationem ad eandem exprimere. Quantitas, quae

quae pro unitate aſsumitur, Menſura dicitur.

Scholion.

14. Haec definitio latior praxi reſpondet: strictius Euclides menſuram definit quantitatem, quae aliquoties repetita alteri fit aequalis: quam nos in Arithmetica partem aliquotam diximus.

Definitio XI

15. Hinc Menſura linearum eſt linea recta arbitrariae longitudinis, in partes minores pro lubitu dividenda, et ſubdividenda. Dividitur autem a Geometris in 10 partes aequales, qui pedes vocantur: unde ipsa Decempeda appellatur. Pes ſubdividitur in 10 digitos; Digitus in 10 lineas, et ita porro.

Scholion I.

16. Menſurae longitudo, et diviſio non eadem eſt ubivis gentium.

Varias

Varias differentias praeter Willebrordum Snellium (a) exponunt Ricciolus (b) Malletus (c) Cl. Eisenschmidius (d) aliique. Aliquas celebrium mensurarum varietates repraesentat Tabula sequens in particulis istiusmodi, qualium pes Regius Parisinus est 1440. Continet is nempe 12 digitos, 12 lineas, lineola 10 particulas, adeoque pes integer particulas 1440.

Scholion.

(a) In Eratosthene Batavo, lib. 2. c. 1. usque ad 5. p. 121, et seqq.
(b) In Geogr. Reform. lib. 2. c. 1. f. 43, et seqq.
(c) Geometriae practiquae, lib. 1. p. 108.
(d) In disquisit. nova de ponderibus et mensuris veterum Rom. Graec. et Hebr. Sect. 3. c. 1. p. 93. et seqq.

Pes Regius		Constanti:	[illegible]
Pariſinus	1440	Neapolit:	3140
Rhenanus	1391 $\frac{3}{10}$	Bononienſis:	1680 $\frac{1}{3}$
Romanus	1310	Argentorat:	1282 $\frac{3}{4}$
Londin:	1350	Norimberg:	1346 $\frac{8}{4}$
Suecicus	1310	Dantiſcanus	1271 $\frac{1}{6}$
Danicus	1403 $\frac{2}{5}$	Halenſis	1310
Venetus	1540		

Scholion II.

17. Diviſionem Menſurae decimalem primus introduxit Stevinus, teste ipſius Geometria practica, dubio procul exemplo Regiomontani. Indicem autem decempedarum conſtituit 0, pedum 1, digitorum 2, linearum 3, & tanquam denominatorum logarithmos (§. 364 Arith.) quos circello incluſos numeris adſcribit. Sed commodius Joannes Bayerus in Logi-

Logiſtica decimali, et Stereometria logarithmos characteribus Romanis expreſſos apicibus numerorum adſcribit. E.gr. tres perticae, quinque pedes, septem digiti, et octo Lineae ita ſcribuntur: 3° 5' 7'' 8''' ~~scribimus~~. Commodiſsimum saepe accidit, ſi numeri integra, ſive decempedas deſignantes a fractionibus decimalibus, pedibus nempe, digitis, lineis & puncto sepa=rentur ubi monuimus in Arithmetica (§. 305). Ita loco 3° 5' 7'' 8''' ſcribimus 3.578. Admodum R. P. Franciſcus Noël autor eſt (e) diviſionem decimalem non modo in menſuris, sed et ponderibus ſiniciſ adhiberi.

Definitio XI.

18. Superficies eſt magnitudo duabus dimenſionibus praedita, seu in Longitudinem, et Latitudinem extenſa.

Corolla=

(e) In Obſervatio: Mathematico- Phyſicis in India, et China factis, c: 7. p: 104 et ſeqq.

Corollarium

29. Termini superficiei secundum longitudinem, et Latitudinem sunt lineae, secundum profunditatem ipſam et terminus sui exiſtit.

Scholion

30. Nimirum in longitudine nullum aſſumi poteſt punctum, cui non reſpondeat aliqua linea secundum Latitudinem, et contra.

Definitio XII.

31. Per perimetrum intelligimus continuum quo aliud continuum terminatur.

Definitio XIII.

32. Figura eſt continuum perimetro terminatum.

Scholion

33. Dicitur tam de superficiebus, quam de ſolidis. In priori caſu perimetri ſunt Lineae; in poſteriori

ori superficies.

Definitio XIV.

34. Figura rectilinea est, cujus perimeter ex lineis rectis; Curvilinea, cujus perimeter ex curvis; Mixtilinea, cujus perimeter partim ex rectis, partim ex curvis constat.

Definitio XV

35. Latus est linea, quae est pars perimetri figurae superficialis.

Definitio XVI.

36. Planum seu figura plana est, si e quovis puncto perimetri ad quodlibet ejusdem rectam in eadem ducere licet.

Definitio XVII.

37. Circulus est figura plana, linea
Tab. I. in se redeunte terminata, ex cujus sin-
Fig. 6. gulis punctis ad punctum interme-
dium C, quod centrum vocari solet,
ductae rectae sunt inter se aequales.

Linea

Linea illa peripheria dicitur.

Definitio XVIII.

38. Chorda AB est recta a peripheria ad peripheriam ducta.

Definitio XIX.

39. Diameter AE est chorda per centrum C transiens. Ejus dimidium AC, sive recta CD ex centro C ad peripheriam ducta dicitur semidiameter, item Radius.

Corollarium.

40. Radii ergo unius circuli inter se aequales sunt (D: 37).

Definitio XX.

41. Arcus est pars quantalibet peripheriae AFB; gradus vero est pars ejusdem trecentesima sexagesima. Quilibet gradus in 60 minuta prima; minutum quodlibet in 60 secunda, secundum unumquodque in 60 tertia &c subdividitur. Euclides arcum

cum quoque peripheriam vocat.

Corollarium.

42. Cum peripheria cujuslibet circuli in 360 gradus dividatur; circuli majoris gradus sunt majores gradibus minoris.

Scholion.

43. Scrupula graduum sunt fractiones sexagesimales (§. 38 & seqq.) et apicibus suis notantur (§. 38 & seqq.). Gradui tanquam integro seu unitati cifra 0, minutis primis 1, secundis 2, tertiis 3 & consequenter gradus cum suis scrupulis eodem modo scribuntur, quo decempeda cum suis (§. 27). E. gr. 3 gradus, 15 minuta, 16 secunda ita scribis: 3°, 15′ 16″. Etsi autem Aegyptii veteres, quibus hanc divisionem acceptam ferunt, hoc artificio computum astronomicum a fractionibus liberaverint, cum fractiones sexagesimales instar numerorum integrorum tractari possint, nec

nec ſine prudenti consilio eundem in finem eum graduum numerum fecerint, qui per 2.3.4.5.6.7.8.9. exacte dividitur, nec minus eum fecerint exponentem rationis, juxta quam scrupula decreſcunt, quae 2.3.4.5. etc. metiuntur; non tamen ſine ratione curarunt poſt Stevinum (a) Oughtredus (b) Wallisius (c) aliique, ut repoſitis fractionibus ſexageſimalibus decimales ſuſciperentur: nulla enim in decimalibus reductione minorum fractionum ad majores, vel majorum ad minores opus eſt; ſexageſimales vero non ſine taedio reducuntur. Multiplicatio quoque, et diviſio decimalium facilior quam ſexa=

(a) In praef: ad Tract: de Logiſtica decimali.
(b) Clavis Mathemat: c: 1. p:m: 2.
(c) Algebrae c: 9. f: 39. Vol: II. Oper: Mathe:
(d) In Coſmographia lib: 1. def: 6. f: 109. Ge:rum Gallice editum.

ſexageſimalium (P: 364, et seq: 393, et seq: Arit:) Id conſilium secuti sunt Henricus Briggius in Canone triangulorum artificiali apud Henricum Gellibrand in Trigonometria Brittannica; Joannes Newton in Aſtronomia pariter, ac Trigonometria Brittannica et Nicolaus Mercator in Institutionibus Aſtronomicis. Stevinus (de incitatione praecedentis folii) contendit, eandem circuli diviſionem antiquitus, in ſeculo sapiente, quod adſtruere conatur, obtinuiſſe.

Definitio XXI.

44. Circuli ~~[illegible] [illegible]~~ concentrici sunt, qui idem centrum habent: Excentrici vero, qui habent diverſa.

Definitio XXII.

Tab: I. Fig: 2. 45. Segmentum Circuli eſt pars ipsius AFBA arcu AFB, et Chorda AB comprehenſa. Dicitur segmentum

majus

majuſ, quod Semicirculo majuſ eſt; mi=
nuſ vero, quod minuſ eſt.

Definitio XXIII.

46. Sector Circuli eſt pars ejuſ AC
D duobuſ Radiis AC, ~~et~~ et CD atque
arcu AD comprehenſa.

Definitio XXIV.

47. Recta HI circulum in L tangit, ei Tab: I
ipſi ita occurrit, ut producta tota extra Figura
circulum cadat; Circuluſ vero Circulum 3. 5.
intuſ tangit, ſi huic occurrenſ totuſ intra, 4.
extuſ vero tangit, ſi eidem occurrenſ totuſ
extra hunc cadit.

Corollarium I.

48. Recta CL ex centro C ad conta=
ctum L ducta eſt Radiuſ Circuli (§. 39).

Corollarium II.

49. Circuli ergo ſe extuſ tangenteſ Tab: I
in L diverſa centra C, &c habent, adeo= Fig: 4
que eccentrici ſunt (§. 44)

~~Corollarium~~
Defini=

~~Corollarium III.~~

Definitio XXV.

Tab: I. Fig: 6. 50. Linea AB lineam CD secat in E, si eam dirimit in partes CE, ED cis, et ultra ipsam sitas.

Corollarium I.

51. Cum etiam CD ipsam AB dirimat in partes AE, et EB cis et ultra CD sitas; si AB secet CD in E, etiam vicissim CD secabit AB in eodem puncto E.

Corollarium II.

Tab: I. Fig: 7. 52. Si recta MN circulum in O secet pars ejus ON intra circulum cadit (P. 37).

Corollarium III.

53. Si circulus circulum secet, cum utriusque peripheria in se redeat (P. 37), pars peripheriae unius circuli intra alterum cadat necesse est.

Definitio XXVI.

Tab: I. Fig: 9. 54. Angulus est duarum linearum

AB

AB, et AC in puncto A concurrentium mutua inclinatio; Lineae AB, et AC dicuntur crura, punctum concursus A Vertex anguli.

Scholion.

55. Angulus hic vel unica littera A verticî ejus adscripta, vel ad evitandam in casibus nonnullis confusionem, tribus litteris BAC indigitatur, ita ut verticî adscripta medio loco ponatur. Saepe nomen angulo imponit littera minor, velut x, eidem inscripta. Utimur vero angulis ad linearum situm determinandum.

Definitio XXVII.

56. Angulus insistere dicitur lineae, in qua crura ejus terminantur.

Definitio XXVIII.

57. Mensura anguli BAC est arcus DE, ex vertice A, radio pro lubitu arbitrario AE, inter crura ejus AB, et AC descriptus.

Corollarium

Corollarium.

58. Anguli ergo distinguuntur per ra-
tionem arcuum ex vertice intra crura
descriptorum ad peripheriam: distin-
guuntur enim per illos arcus, arcus vero
per rationem ad peripheriam distingue-
re licet (§. 41 Geom: et §. 13 arith:). Et
eadem de causa quantitas anguli aesti-
matur ex ratione arcus istius ad peri-
pheriam.

Scholion.

59. Tot scilicet graduum, et scrupulo-
rum dicitur esse angulus, quot gradu-
um, et scrupulorum est arcus DE (§. 41).

Definitio XXIX.

Tab: I. Fig: 10. 60. Anguli contigui FGH, et HGI
sunt, quorum idem est vertex G, et crus
unum commune GH.

Definitio XXX.

Tab: I. Fig: 6. 61. Rectae linae AE, et EB indi-
rectum sitae sunt, si ejusdem Rectae

AB

ca.

AB parteſ exiſtunt.

Definitio XXXI.

62. Angulus deinceps poſitus AEC. T: I.
dicitur, qui oritur, anguli AED latere F: 6.
uno ED in C producto.

Corollarium I.

63. Habent adeo anguli deinceps poſiti AEC, et AED cruſ unum AE commune, et cruſ alterum uniuſ CE in directum ſitum eſt cruri alteri alteriuſ ED (§: 61).

Corollarium II.

64. Hinc anguli deinceps poſiti ſunt contigui, sed non contra (§: 60).

Definitio XXXII.

65. Anguluſ flectus KLM eſt, cui de- Ta: I.
inceps poſitus AED inaequaliſ, Angu- Fi: 11.
luſ acutuſ AEC eſt obliquuſ minor recto. Angulus obtuſus AED eſt obliquuſ recto major.

Definitio

Definitio XXXII.

I. 65. Angulus rectus KLM eſt, cui de-
11. inceps poſitus KLN aequalis eſt.

Definitio XXXIII.

66. Angulus obliquus AEC, cui dein-
:I. ceps poſitus AED inaequalis. Angulus
16. acutus AEC eſt obliquus minor recto.
Angulus obtuſus AED eſt obliquus recto
major.

Definitio XXXIV.

:I. 67. Anguli verticales o, et x sunt, si
:5. crura unius AE, et EC in directum
jacent cruribus alterius EB, et ED.

Definitio XXXV.

I. 68. Si lineae ST duae aliae OA, et
12. RB a diverſis plagis in diverſis punctis
A et B occurrant, anguli, quos cum
ea efficiunt, x, et y dicuntur alterni.

Definitio XXXVI.

69. Si vero lineae ST duae aliae A
P, et BR ibidem in diverſis punctis A,

et B

et B; sed ab eadem plaga occurrant, anguli, quos cum ea efficiunt u, et y, item z, et y, dicuntur oppositi: et quidem u dicitur oppositus externus, z vero oppositus internus ipsius y.

Definitio XXXVII.

70. Angulus ad peripheriam est angulus F: 1 ABD, cujus vertex B, et crura BA, atque F: 1 BD in peripheria terminantur; Dicitur etiam angulus in segmento.

Corollarium.

71. Intercipitur adeo a duobus chordis AB, et BD (F. 38, et 54) atque arcui AD insistit (F. 50.).

Definitio XXXVIII.

72. Angulus ad centrum est angulus F: 1 ACD, cujus vertex in centro circuli C F: 1 est, crura vero AC, et CD in peripheria terminantur.

Corollarium.

73. Angulus ad centrum a duobus radiis

radius intercipitur (P. 39), atque arcui
AD inſiſtit (P. 41. 56); conſequenter ar-
cus AD ejus menſura (P. 57.).

Definitio XXXIX.

D. I. 74. Angulus extra centrum HKI eſt
P. 14. cujus vertex K extra centrum eſt, cru-
ra vero HK, et IK in peripheria termi-
nantur.

Corollarium.

75. Inſiſtit ergo arcui HI (P. 41. 56).

Definitio XL.

D. I. 76. Angulus contactus HLM eſt, quem
F. 3. arcus circuli ML cum tangente HL
ad contactum efficit.

Definitio XLI.

77. Angulus segmenti MLH vel M
LI eſt, quem chorda ML cum tangente
HL ad vel LI ad contactum L efficit.

Definitio XLII.

Ta: I. 78. Linea KL perpendicularis aut
Fig: 11. normalis eſt ad alteram LM, ſi cum

ea

ea efficit rectum angulum.

Corollarium.

79. Si igitur LK ad NM perpendicularis, anguli ad L deinceps positi aequales sunt (P. 63) et contra.

Definitio XLIII.

80. Linea AB est ad alteram AC obliqua, si cum ea efficit angulum obliquum. T: I F: g

Definitio XLIV.

81. Linea OP parallela est alteri QR, si ubique eandem ~~[illegible]~~ ab ea distantiam servat. T: I F: u

Corollarium.

82. Lineae ergo parallelae in infinitum continuatae non concurrunt.

Definitio XLV.

83. Lineae convergentes TO, et VQ T. I. F. sunt, quarum distantia continuo fit minor.

Definitio

Definitio XLVI.

84. Lineae divergentes **TN**, et **VP** sunt, quorum diſtantia continuo fit major.

Definitio XLVII.

85. Opponi dicuntur, e quorum uno ad alterum perpendicularem ducere licet.

Scholion.

86. Puncta abſolute conſiderata dicuntur punctis opponi, si fuerint termini ejuſdem rectae. Nimirum cum recta ſit breviſſima linea inter duos terminos (§. 19), qualis etiam eſt perpendicularis inter eas, quae a puncto ad lineam, vel ſuperficiem duci poſſunt (§. 124); perpendicularis vicem in eo caſu ſubit, ubi punctum alterutrum extra lineam vel ſuperficiem ſumitur.

Definitio XLVIII.

87. Triangulum eſt figura tribus lineis terminata.

Defini:

Definitio XLIX.

88. Triangulum aequilaterum ABC est, cujus omnia latera inter se aequalia sunt. In genere figura aequilatera dicitur, cujus latera singula inter se aequalia. T. a: I T: 16

Definitio L.

89. Triangulum scalenum ACB est, cujus nullum latus alteri aequale, seu cujus singula latera sunt inter se inaequalia. T. I T: 1

Definitio LI.

90. Triangulum aequicrurum sive Isosceles DEF est, quod duo latera ae=qualia habet. T. I T. 17

Definitio LII.

91. Triangulum Rectangulum KML est, cujus angulus unus K rectus est. T. I T. 19

Definitio LIII.

92. Triangulum obtusangulum PNO est, cujus angulus unus N est ob=tusus. T. I T. 2

Definitio

Definitio LIV.

T: I.
F: 16. 93. Triangulum acutangulum ACB est, cujus singuli anguli sunt acuti.

Definitio LV.

94. Triangulum obliquangulum est, cujus singuli anguli sunt obliqui.

Definitio LVI.

T: I.
F: 19. 95. Hypothenusa ML est Latus, in triangulo Rectangulo, angulo Recto K oppositum.

Definitio LVII.

96. Catheti sunt Latera trianguli Rectanguli MK, et KL angulum Rectum K intercipientes.

Definitio LVIII.

97. Figura quadrilatera est, cujus perimeter ex quatuor lateribus constat, et Rectangula dicitur, si anguli ejus singuli fuerint Recti; obliquangula, si obliqui.

Definitio LIX.

T: I.
F: 21. 98. Quadratum ABDC est figura quadrilatera

quadrilatera, aequilatera, rectangula. T. I. F. 11.

Definitio LX.

99. Rhombus EFHG est figura qua- T. I. F. 12.
drilatera, aequilatera, obliquangula.

Definitio LXI.

100. Rectangulum, sive oblongum T. I. F. 13.
MLKI est figura quadrilatera re-
ctangula, latera opposita ML, et IK,
item IM, et LK aequalia habens.

Definitio LXII.

101. Rhomboides NOPQ est figura T. I. F. 14.
quadrilatera, obliquangula, latera
opposita OP, et NQ, item ON, et P
Q aequalia habens.

Definitio LXIII.

102. Parallelogrammum est figura
quadrilatera, cujus latera opposita
sunt parallela.

Definitio LXIV.

103. Trapezium RTUS est figura T. I. F. 15.
quadrilatera, non parallelogramma. Qui-

dam

Quidam Trapezium appellant figu=
ram quadrilateram, cujus duo tantum
latera opposita sunt parallela, quae
aliàs trapezium parallelarum basi=
um dici solet: Figura vero cujus neu=
trum latus alteri parallelum, Tra=
pezoides iisdem dicitur.

Definitio LXV.

T. III Fig: 16. 17. 104. Figura polygona, seu multila=
tera ABCED, vel FGHIKL est, cujus
perimeter ex pluribus, quam quatuor
lateribus componitur. Quod si late=
ra fuerint quinque Pentagonum; si
sex Hexagonum; si septem Heptago=
num; si octo Hoctogonum &c dicitur.

Definitio LXVI.

105. Figura aequiangula est cujus
singuli anguli aequales sunt.

Definitio LXVII.

106. Figura regularis est figura
aequilatera, et aequiangula.

Definitio

Definitio LXVIII.

107. Figura irregularis eſt, quae non ſimul aequilatera, et aequiangula.

Definitio LXIX.

108. Figurae inter ſe aequilaterae dicuntur, ſi ſingula latera unius fuerint ſigillatim aequalia ſingulis lateribus homologis alterius.

Definitio LXX.

109. Figurae inter ſe aequiangulae ſunt, et ſi ſinguli anguli unius ſinguliſ angulis homologis alterius aequales ſunt.

Definitio LXXI.

110. Dicuntur vero tam anguli quam latera homologa, ſi eundem ordinem a primo in utraque figura ſervent.

Definitio LXXII.

111. Diagonalis PN eſt recta ex vertice anguli unius P in verticem alterius N ducta.

Definitio

Definitio LXXIII.

T: I. 112. Basis figurae est pars perimetri
F: 19. ima KL.

Corollarium.

113. Cum situs figurae ipsi non sit essentialis, quamlibet perimetri partem seu latus figurae quodlibet pro basi assumere licet.

Definitio LXXIV.

T: I. 114. Vertex figurae M est vertex an-
F: 19. guli basi KL oppositus.

Definitio LXXV.

115. Altitudo figurae est distantia verticis a basi.

Definitio LXXVI.

Tab. 116. Figura ABCDE dicitur cir-
VIII. culo inscripta, si peripheria per verti-
F: 107. ces singulorum angulorum ipsius transit: tuncque Circulus figurae dicitur circumscriptus.

Definitio

Definitio LXXVII.

116. Figura abcde dicitur Circulo ~~inscri~~ circumſcripta, ſi ſingula ejus Latera peripheriam tangant, tumque Circulus figurae dicitur inſcriptus.

Definitio LXXVIII.

118. Menſura figurae eſt quadratum, cujus Latus perticae aequale, diciturque pertica quadrata, et in pedes quadratos, ſicut pes quadratus in digitos quadratos dividitur.

Definitio LXXIX.

119. Eodem modo determinari dicuntur, ſi data, quae unum determinatur, fuerint ſimilia datis, quae determinatur alterum, et utrobique ex datis ſimilibus eaſdem regulas reliqua determinantur.

Corollari-

Corollarium.

120. Quae itaque eodem modo determinantur, in iis coincidunt ea, quae discerni debent, adeoque similia sunt.

(§. 24 Arithm:)

Caput ~ II ~.

De Propositionibus quibusdam Fundamentalibus.

Problema. I.

121. A dato puncto A ad datum punctum B Lineam rectam ducere.

Resolutio.

T. II. F. 18. I. In charta

Linea recta ducitur juxta regulam

lam EF ad puncta data A, et B ap-
plicatam graphio HI, penna aut
plumbagine.

II. In ligno vel ſaxo

Recta delineatur etiam ſine regu-
la, ſi filum creta, vel ceruſſa deli-
butum punctis datis A et B appro-
matur et, medio digitis prehenſo,
ſurſum trahatur, moxque iterum
demittatur.

III. In campo

Recta deſignatur, ſi baculos LK (:II
in punctis datis beneficio libellae (:fig
M ad horizontem perpendiculari-
ter defixos, quorum ſummitati
muccinium aut folium chartae
mundae alligatur, ſi e longinquo
videri debeant.

Scholion I.

112. Cum regulae orichalceae, et
argenteae chartam facile nigrent;
iis praeferuntur, quae ex ligni In-
dicis.

dictis parantur, ut ebeninae. His enim
accuratam politiem inducere licet, ne
sordes facile adhaerescant, nec fibrae
exiguae calami graphiique motum uni-
formem impediant: quod quamvis, nec-
is et his similibus familiare vitium.

Scholion II.

T. II. Fig. 19. 123. Pennae optimae sunt, quae ex
corvorum alis evelluntur: propterea
quod, anserinis duriores, lineis sub-
tilioribus, et purioribus ducendis inser-
viunt. Baculi vero **LK** cuspide fer-
rea **K** muniuntur, ut eo facilius in
terra praesertim duriore defigi que-
ant.

Scholion III.

124. Utendum vero est atramen-
to non communi, sed Sinico; tum quia
commune ob corrosivitatem vitrio-
li, quod ipsum ingreditur, chalybe-
am graphii cuspidem arrodit; tum
quia

quia Sinicus facilius effluit, etiam=
si atrius sit communi. Accedit, quod
Sinico lineae nitidiores ducantur,
quam communi.

Problema II.

115. Duobus baculis in solo defi=
xis, tertium vel plures in eadem re-
cta cum iis infigere.

Resolutio.

Baculus ita infigitur, ut oculo in
unum directo ceteri non appareant.

Ratio a luminis rectilinea propa=
gatione petenda, de qua in Opticis.

Problema III.

116. Lineam rectam metiri.

Resolutio.

Ad manus sit necesse est mensura §. 11
(§. 13). Nimirum pro lineis in charta §. 30
datis abscindantur ex RT 10 partes
aequales longitudinis arbitrariae,
quae pedes designent: intervallum
vero

vero 10 pedum RS in reſiduum li-
neae transferatur, quoties fieri po-
teſt (f. 15). In campo vel catena, vel
fune cannabino, vel pertica in di-
gitos, pedes, et decempedas legitime
diviſis utimur. Sufficit autem ul-
timam decempedam in pedes, et pe-
dem ultimum in digitos dividi.

Quodſi ergo lineam rectam meti-
ri jubearis

I. In charta

1. Ponatur cruſ circini unum in
A, et eousque aperiatur, donec al-
terum extremum B attingat.

2. Mox circini cruſ unum in fine
decempedae alicujus, e: gr: in
10 ponatur, et notetur, quem-
nam pedem menſurae alterum
attingat, e: gr: 5. Erit linea AB 15.

II. In Campo

1. In utroque lineae extremo erigan-
tur

tur baculi (§. 121) et, si ea mensurae longitudinem excedit, constituantur cum iis alii in eadem recta (§. 125).

2. Funis cannabinus aut catena mensuram largiens ab uno baculo usque ad alterum ita extendatur, ut utrumque ad angulos rectos secet (§. 184): quod perpendiculo appenso evidens redditur.

3. Decempedae, pedes atque digiti inter utrumque intercepti numerentur.

Scholion I.

127. Si catena utrinque in annulos desinat, per quos baculos trajicere licet, lineam metimur, baculis eisdem cum ceteris in eadem recta continuo collocatis (§. 121). Notandum tamen, dum baculus ex A in B transfertur, non in vestigio baculi B, sed prope ipsum in D eundem infigi, atque annulorum crassitiem longitudini mensurae = §. II §. 31

surae

ſurae non acceſſerit debere. Quodſi ta-
men haec ſit pars menſurae eaque ſub-
dupla diametri baculi; baculus ex
A ablatus in ipſo B deſigi poterit.

II. Parantur autem catenae PQ ex filis
30. ferreis pedalibus, earumque longitudo
bis decempedas excedere vix debet, ne
pondere fiant moleſtae: quam ob
rationem nec filis ferreis nimium
craſſis utendum.

Scholion II.

118. Si pertica circa alterum ſui extremum tanquam centrum ſe quadrantem circuli elevata, et per alterum, rurſus demiſſa lineam metitur; craſſities ejus longitudini lineae rectae toties addenda, quoties ad eam applicata fuerit, aut longitudo perticae particula craſſitiei, conguente imminuenda. Ceterum quia perticae, ob inaequalitatem extenſionis

sionis prorsus liberae, praerogativam quandam prae catenis, et funiculi habent; earum extremitates annulis ferreis instrui oportet, ut observationibus, quae in scholio praecedenti diximus, tanto minus periculo superstit, ne a recta dimetienda declinetur.

Scholion III.

129. Funes cannabini humor contrahit, et vires diversae inaequaliter tendunt. Schwenterus (a) auctor est, cum aliquando exercitiis Geometricis in campis vacaret, longitudinem funis, quae erat 10 pedum, cadente pruina, horae unius intervallo, ad pedes 15 redisse. Ut igitur hi naevi tollantur, funiculi ex quibus conficiuntur, in giros contrarios contorquendi, ipse autem funis oleo ad ignem fervente immittendus, et postquam exsiccatus fuerit, per ceram liquefactam trahendus, tandemque

---

Geom: pract. lib. 2. Tract. I. p: 381

lemque cerandum. Nullum longi-
tudinis decrementum notabis, etiam-
si funem iſtiuſmodi per diem inte-
grum ſub aquis demerſum detineas.
II. Ne autem funis humum contin-
33. gat, ſuſtentaculum Z ipſi ſupponen-
dum. Perpendiculum, quo ad funem
horizontaliter extendendum utimur,
ex filo, et appenſo globo, vel pondere plum-
beo conſtat.

Problema IV.

130. Data longitudine lineae in
menſura e: gr: Pariſina, invenire ean-
dem in menſura alia, e: gr: Londinenſi,
cujus ad priorem nota eſt ratio.

Reſolutio.

Sit e: gr: linea data 186 pedum
Pariſinorum, quaeritur quot eadem
ſit pedum Londinenſium?

Quoniam pes Londinenſis eſt
ad Pariſinum ut 135 ad 144 (§.
26);

16); inferatur (§. 311 Arith.):

135 : 144 = 186 : 26784 | 198 $\frac{54}{135}$ ped: Londinen:

```
   186       135) 135 : :
  ----            ------
   864             1328:
  1152             1215
  144              -----
 -----              1134
 26784              1080
                    ----
                      54
```

Problema V.

131. Ex dato quovis centro C dato radio quocunque AC Circulum describere.

Resolutio.
§: 111
§: 34

I. In charta.

1. Collocetur circini cuspidum in centro dato C, et aperiatur intervallo radii dati AC.

2. Moveatur circinus circa centrum C: ita cuspis alterum peripheriam designabit (§: 37).

II. In solo, et quotiescunque circini apertura tanta fieri nequit, quanta

ta requiritur, radii vice fungitur filum, funiculus aut virga sive lignea, sive ferrea.

Scholion I.

II. 35. 132. Si fune, aut filo utimur, cavendum est, ne stilus FA, qui perpendiculo designatur, e situ perpendiculari dimoveatur: id quod impedit filum transversum FE, si fuerit AF=3, AE=4, et FE=5. Ratio patet per theorema Pythagoricum infra demonstrandum (§. 417.)

Scholion II.

II. 37. 133. Circini, ut instrumenta geometrica reliqua, ex orichalco parantur ob durabilitatem, tractabilitatem et nitorem hujus metalli. Cuspides tamen eorum ex chalybe fiunt: fert enim ejus durities, ut subtilius exacuantur. Circini, quo ad lineas metiendas, et dividendas utimur, cura

eadem

eadem sunt, et invariata. Sed circini, qui peripheriis, et arcubus describendis inserviunt, crus alterum variari potest, ut tam plumbagine, quam atramento Sinico uti detur, prout commodum visum fuerit. Plumbagine nempe utimur, quoties arcus delineantur absoluta operatione mox delendi. Longitudo, vel 3, vel 6 digitorum esse solet.

Corollarium.

134. Quoniam unius circuli peripheria eodem modo determinatur, quo peripheria alterius cujuscunque (§. 119), omnes peripheriae sunt inter se similes (§. 110). Eodem modo patet, omnes circulos, et semicirculos esse inter se similes.

Theorema II.

135. Diameter AE dividit tam peripheriam, quam circulum ipsum in T. I. F. 2

in

in duas partes aequales.

Demonſtratio.

Partes peripheriae ADE, et ABE, itemque circuli ADECA, et ABECA determinantur, recta AC circa centrum C mota, donec sibi in directum jaceat (§. 131). Sunt adeo arcus ABE, et ADE partes peripheriae, segmenta ABECA, et ADECA partes circuli eodem modo determinatae, adeoque similes (§. 170). Quamobrem illi ad peripheriam, haec ad circulum eandem rationem habent (§. 170 Arith.), consequenter tum illi, tum haec inter ſe aequantur (§. 177 Arith.) Q. e. d.

Corollarium.

136. Super quavis igitur linea AE (producta, si opus erit §. 11) ex aſſumto in ea puncto C deſcribi poteſt semicirculus.

Theorema

Theorema III.

137. Si ex centro C duorum circulo= §:11
rum concentricorum ducantur radii §:34
C DA, et C EB, tum arcus DE et BA
ad peripherias, tum sectores DCE, et
ACB ad areas suorum circulorum e=
andem rationem habent.

Demonstratio.

Cum circuli concentrici per hypo=
thesin idem centrum C habeant (§:
44), et arcus AB, atque DE, itemque
sectores ACB et DCE describantur,
radiis AC, et DC a communi termino
C DA ad communem terminum CE
B motis (§:131), arcus isti atque secto=
res eodem modo determinantur (§:
119), consequenter illi peripheriarum,
hi circulorum partes similes sunt
(§:110) adeoque illi ad peripherias, hi
ad circulos eandem rationem ha=
bent (§:110 Arith:) Q. e. d.

Corollarium

Corollarium I.

III. 138. Cum arcus **DE** et **AB** intra
34. crura ejusdem anguli **ACB** ex ejus vertice **C** descripti sint arcus circulorum concentricorum (§.44); ad suas quoque peripherias eandem rationem habent, consequenter inter se sunt ut peripheriae (§.173 Arith:). Quoniam itaque peripheriae eundem numerum graduum continent (§.41); ipsi quoque eundem continere debent.

Corollarium II.

139. Quia anguli quantitas aestimatur per rationem arcus ex vertice intra crura descripti ad totam peripheriam (§.55); perinde est, quocunque radio arcus iste describatur (§.137).

Corollarium III.

140. Eadem ergo manet anguli quantitas, sive crura producantur, sive minuantur.

Theorema.

Theorema IV.

141. Angulorum aequalium A, et a (§. II) menſurae BC, et de ſunt arcus ſimiles, (§. 40) et contra ſi angulorum A, et a menſurae BC, et de ſimiles ſint, anguli aequales ſunt.

Demonſtratio.

Cum anguli cujuſcunque A, vel a quantitas aeſtimetur per rationem arcus BC, vel de, ex vertice A, vel a intra crura deſcripti, ad integram peripheriam (§. 58), ſi A = a, ratio arcuum BC, et de ad peripherias ſuorum circulorum eadem eſſe debet, conſequenter ſint partes earum peripheriarum (§. 40) ſimiles ſunt (§. 110 Arith.) Quod erat unum.

Si arcus BC, et de, menſurae angulorum A, et a (§. 51), fuerint ſimiles, ad peripherias, quarum partes ſunt (§. 40) eandem rationem habent (§. 110 Arith.) Quare cum quantitas angulorum A, et a

hab

ſeam rationem aeſtimetur (§. 58) ea
dem omnino eſſe debet, hoc eſt, anguli
aequales ſunt. Q. e. alterum.

Corollarium.

144. Cum arcus ſimiles eandem ra
tionem habeant ad peripherias, quarum
ſunt partes (§. 170 Arith.), ſi fuerit par
tes aequalium peripheriarum, aequa
les ſunt (§. 177 Arith.) ſi ergo menſurae
angulorum aequalium fuerint par
tes eiuſdem peripheriae, vel aequali
um peripheriarum, aequales ſunt (§.
141), et contra.

Theorema V.

T. I. 145. Anguli recti KLM menſura
F. 11. eſt quadrans circuli.

Demonſtratio.

Producatur LM in N (§. 11), erit
x = o (§. 65). Sed cum ex L ſuper re
cta NM deſcribi poſſit ſemicirculus
(§. 136); angulorum x, et o menſurae

AC

AC, et CB junctim sumtae confi=ciunt semicirculum (§. 57.). Ergo unius mensura est dimidius semi=circulus, hoc est circuli quadrans (§. 142). Q. e. d.

Corollarium I.

144. Cum quadrans circuli 90° comple=ctatur (§. 41.); angulus rectus est 90° (§. 59).

Corollarium II.

145. Omnes adeo recti sunt inter se ae=quales (§. 141.), et aequales recto etiam recti sunt.

Corollarium III.

146. Acutus igitur minor, obtusus major est quam 90° (§. 66.).

Theorema VI.

147. Duo anguli deinceps positi x, (§. 1. et y, aut quotcunque ad idem punctum (§. 6. E super eadem recta CD constituti sunt aequales duobus rectis. Et contra si x et y fuerint duobus rectis aequales, C E sita est in directum ipsi ED.

Demon=

Demonstratio.

Quoniam in casu priore anguli x, et y sunt deinceps positi, erit per hypoth. **EC** cum **ED** eandem rectam constitu=it (§. 62). In casu posteriore omnes an=guli constituti sunt super eadem re=cta **CD** ad idem punctum **E**, per hypo. Quare cum ex **E** super **CD** describi possit semicirculus (§. 136), in utro=que casu mensura omnium angulo=rum simul est semicirculus (§. 57). Sed idem est mensura duorum rectorum (§. 143). Ergo anguli isti sunt duo=bus rectis aequales (§. 142). Q. e. unum.

Quodsi x et y fuerint duobus rectis aequales, nec tamen **CE** ponatur ipsi **ED** in directum sita, recta quaedam alia velut **EA** ipsi **ED** in directū jacebit (§. 21), atque hinc o + y et x cum sint deinceps positi (§. 62) conse=quenter duobus rectis aequales, et

demon=

demonſtrata, adeoque $o+y+x=y+x$ (§. 87 Arith: et §. 145 Geom:) quod cum sit abſurdum (§. 84 Arit.), CE ipſi E D in directum sita. Q. e. ol[illegible].

Corollarium I.

148. Anguli, qui ſunt deinceps, x, et y, aut plures circa idem punctum ejuſdem rectae conſtituti, ſi junctim ſumantur conficiunt 180° (§. 144).

Corollarium II.

149. Angulorum deinceps poſitorum dato uno, alter ibidem datur: relinquitur nimirum, ſi datus ex 180° ſubducatur.

Corollarium III.

150. Si in Campo angulum inacceſſum vel obtuſum Quadrante metiri jubemur, et eum, qui eſt deinceps, accedere licet, illius loco hunc metimur: ex 180° enim ſubductus quaeſitum relinquit (§. 149).

Corollari:

Corollarium IV.

151. Certus evades, te omnes figu-
rae rectilineae angulos in campo
exacte dimensum esse, si finita o-
peratione deinceps positos etiam me-
tiaris, et eos singulos illis singulis
addas: quodsi enim ubique prodierit
summa 180°, operatio rite peracta (§.
148.).

T. II.
F. 36.

Problema VI.

152. Angulum metiri.

Resolutio.

Cum anguli ACB mensura sit
arcus DE ex centro C intra crura
AC, et CB descriptus (§. 59), totum
negotium eo redit, ut numerus gra-
duum, qui arcui DE competunt, de-
terminetur: id quod fit ope semicir-
culi in 180° exactissime divisi. Nimi-
rum.

I. In charta.

1. centrum semicirculi ad verticem anguli C. applicatur, et radius ejus CE cum BC admovetur.

2. Gradus in arcu DE. inter crura anguli AC, et CB intercepto numerantur.

II. In campo

1. Instrumentum goniometricum ita collocatur, ut radius ejus CG uni cruri anguli; centrum vero C verti- ci ejus immineat. Prius obtinetur collineando per dioptras F, et G, seu pinnulas immobiles ad diametrum perpendiculariter erectas, versus baculum in extremo cruris defixum; posterius vero perpendiculum ad centrum instrumenti applican- do. Fig. II. F. 38.

2. Regula HI circa centrum mobi- lis versus crus anguli alterum pro- movetur, donec per pinnulas ipsi affixas baculus in extremo ejus defi-

de fixus collineanti occurrat.

3. Gradus, quem regula inſtrumento indicat notatur.

Scholion I.

153. Semicirculus minor, quo in charta utimur inſtrumentum tranſportatorium vulgo appellatur. In campo quidam circulo integro quidam non niſi quadrante utuntur.

Scholion II.

154. Diameter tranſportatorii eſt trium fere digitorum Rhenanorum, majorum vero inſtrumentorum Goniometricorum unius pedis, aut ad ſummum unius cum dimidio. Diviſio accurata fieri debet in tranſportatoriis gradus dimidii ſatisfaciunt; in majoribus dena prima. Anguli in campo inſtrumento majore capti, quantum fieri poteſt accuratiſſime in charta deſignaturi, diametrum

metrum tranſportatorio non multo minorem diametro ejus inſtrumenti, quo in Campo uſi ſumus, et regulam circa centrum mobilem indulgens.

Problema VII.

155. Data quantitate anguli ipſum deſcribere. J. II. F. 35.

Reſolutio.

I. In charta

1. Ducatur recta GB, et
2. Super alterum ejus extremum G ponatur centrum inſtrumenti tranſportatorii, ita ut radius ejus cum recta GB coincidat.
3. Numerentur gradus dati ab E verſus D, et ad gradum ultimum notetur punctum D.
4. Ducatur recta GA per G et D, eritque ACB angulus quaeſitus (§. 141.).

II. In

T:II. II. In campo

F:38. 1. Collocetur instrumentum goniometricum ubi in prob: praec: (§:151).

2. Regula HI circa centrum C ad gradum datum promoveatur.

3. Baculus ita erigi jubeatur, ut per dioptras collineanti occurrat.

Theorema VII.

T:I. 156. Si recta AB alteram CD secet in E, anguli verticales x, et o, item y et E, sunt aequales.

F:6.

Demonstratio.

$$\left.\begin{array}{l} x+y = 180^{\circ} \\ y+o = 180^{\circ} \end{array}\right\} (§:148)$$

Ergo $x+y=y+o$ (§:87 Arit:) adeoque $x=o$ (§:91 Arit:). Eodem modo ostenditur esse $y=E$. Q.e.D.

Corollarium.

157. Quodsi in campo aut alio in casu angulum inaccessum x metiri jubeamur, accessum vero non neque

verticalis

verticalis o: hinc ejus loco metiri licet.

Scholion.

158. Cum Tyrones sub initium Studii Mathematici sensibus atque imaginationi nimis adhuc indulgeant ratiociniis ex aſſumtis deducendis minus adsueti; figuras ex data ex Hypothesibus theorematum aſſumta construere, ac reliquarum linearum, et angulorum ex constructione determinatorum, quantitatem explorare (§. 126. 151) juvat: ita sensus et veritas propositionis eluceſcit, et animus ad demonstrationes genuinas inspiciendas excitatur: cum enim sit scire avidus, rationes veritatis noſſe desiderat. In demonstratione magis acquiescunt Tyrones, examine ratiocinationis legitimae sic facto, non secus ac Theoriae physicae magis satisfaciunt, ubi factis experimentis decretoriis

crebriis consonae deprehenduntur.

Theorema VIII.

T. I
T. 5. 159. Omnes anguli x, y, o, E, t, circa punctum aliquod E constituti, sunt aequales quatuor rectis.

Demonstratio.

Describatur ex puncto E vertice communi angulorum x, y, o, E, t (T. 45) intervallo quocunque E.a circulus (T. 131). evidens est mensuras omnium angulorum simul sumptas db, bc, ca, ad t conficere integram circuli peripheriam (T. 143). Mensura ergo angulorum x, y, o, E, t junctim sumptorum est circulus integer (T. 55). Sed circulus est mensura quatuor rectorum (T. 143). Ergo omnes isti anguli aequales sunt quatuor rectis (T. 141). Q. e. d.

Corollarium.

160. Omnes itaque anguli circa idem punctum constituti junctim 360° conficiunt (T. 144).

Theorema

Theorema IX.

161. Quae sibi mutuo congruunt, ea, et aequalia, et similia sunt.

Demonstratio.

Quae sibi mutuo congruunt, eorum iidem esse possunt termini (§. 3). Ergo unum in locum alterius salva quantitate substituere licet: consequenter aequalia sunt (§. 15 Arith.) q. e. unum. Porro quoniam, quae sibi mutuo congruunt, eosdem terminos habere possunt (§. 3): quin eodem modo determinari queant dubitandum non est. Sunt igitur similia (§. 120). Quod erat alterum.

Theorema X.

162. Quae aequalia, et similia sunt, ea sibi mutuo congruunt.

Demonstratio.

Similia differre nequeunt nisi quantitate (§. 26 Arith.). Quamobrem si ae-

si aequalia fuerint, prorsus non diffe:
runt (§. 15 Arith.). Jam si sibi mutuo
superimposita non iisdem terminis
continerentur, diversitate termino:
rum differrent: quod cum sit absur:
dum, ꝑ demonstrata, iisdem terminis
contineri debent, consequenter sibi
mutuo congruunt (§. 3). Q. e. d.

Theorema XI.

163. Si linea lineae congruit, sin:
gula puncta unius singulis punctis
alterius congruere debent.

Demonstratio.

Linearum enim, quae sibi mutuo
congruunt, iidem termini esse possunt
(§. 3); sed termini linearum secun:
dum Longitudinem sunt duo pun:
cta; secundum Latitudinem et pro:
funditatem, ipsaemet sui termini
existunt (§. 11). Ergo si lineae congruunt
non modo puncta extrema, sed etiam omnia
intermedia

intermedia congruere debent. Q. e. d.

Corollarium I.

164. Si centra, et radii duorum circulorum congruunt; etiam peripheriae, in quibus (radii terminantur §. 39), consequenter circuli ipsi congruere debent (§. 3).

Corollarium II.

165. Ex uno itaque puncto eodem (radio circulus non nisi unicus describi potest.

Theorema. XII.

166. Si fuerint duo anguli BAC, et bac aequales, et vertex unius a. ponatur super verticem alterius A. praeterea crus illius ac super crus hujus AC: etiam crus alterum ab super alterum AB cadet. Tab. III. F. 39.

Demonstratio.

Si negas necesse est ut ab vel intra angulum BAC, vel extra eum cadat. Ducatur ex A, radio AD, arcus Df

§. 13.

(§:131): erit DE menſura anguli BAC, De vel Df menſura anguli bac (§:39); Ergo in caſu priore De menſura anguli bac minor; in poſteriore eadem menſura Df major foret menſura anguli BAC (§:140 citat.). Quod utrumque cum sit abſurdum (§:142), crus AE super AB cadit. Q. e. d.

Theorema XIII.

T: I.
F: 9.

167. Si vertex, et crura anguli unius DAE supra verticem, et crura alterius BAC cadant angulus unus DAE alteri BAC aequalis est.

Demonſtratio

Deſcribatur enim ex communi vertice A inter crura AD, et AE arcus DE (§:134). Erit is menſura anguli DAE (§:57). Sed quoniam crura DA, et AE supra crura alterius anguli AB, et AC cadunt per hypoth:; idem arcus DE inter crura AB et

AC

AC intercipitur. Est igitur et mensura anguli BAC (§. cit.), consequenter DAE = BAC (§. 142). Q. e. d.

Theorema XIV.

168. Lineae rectae aequales sibi mutuo congruunt. §. III §. 40.

Demonstratio

Est ab = AB, per Hypoth. Est vero etiam recta ab similis rectae AB (§. 17). Ergo ab ipsi AB congruit (§. 162). Q. e. d.

Corollarium I.

169. Ergo si recta AB alteri aequali ab ita applicetur, ut punctum A supra a, et ab supra AB cadat, etiam b supra B cadet (§. 3. 17).

Corollarium II.

170. Si rectarum extrema coincidunt, singula puncta unius cum in recta altera (§. 161), atque hinc inter duo puncta nonnisi unica recta cadit.

Corollarium

Corollarium III.

171. Cum radii circulorum sint lineae rectae (§. 39), ubi aequales fuerint, sibi mutuo congruunt (§. 108), consequenter etiam circuli congruere debent (§. 164), atque adeo circuli aequales sunt, quorum aequales sunt radii (§. 161).

Corollarium IV.

172. Quoniam non absimili modo patet, circulum, cujus minor est radius, congruere parti circuli radium majorem habenti; minor est circulus, cujus minor radius, major vero, cujus radius major (§. 20 Arith.).

Theorema XV.

P: I. 173. Si centro circuli C applicetur
P: 2. lineae rectae CD, radio AC aequalis, extremum unum; alterum peripheriam attinget.

Demonstratio.

Quoniam recta CD radio aequalis

lis

lis ellipsi ipsi congruet (§. 168), adeo-
que eosdem cum eo terminos habere
debet (§. 3). Sed radius ex centro edu-
ctus in peripheria terminatur (§. 39).
Ergo est recta CD ipsi aequalis, si al-
terum extremum in C haereat, altero
peripheriam attinget. Q. e. d.

Theorema XVI.

174. Anguli similes sunt etiam
aequales.

Demonstratio.

In angulis similibus ea coincidunt,
quae a se invicem discerni debent
(§. 14 Arith.). Quare cum anguli distin-
guantur per rationem arcuum ex ver-
tice intra crura descriptorum ad pe-
ripheriam (§. 58), et anguli sunt si-
miles, arcus isti ad suas peripherias
eandem rationem habere, hoc est, et
ipsi similes esse debent (§. 141 Geom.
et §. 170 Arith.). Sunt igitur anguli ae-
quales

quales (§. 141). Q. e. d.

Theorema XVII.

175. In figuris ſimilibus anguli homologi ſunt aequales, et latera homologa proportionalia.

Demonſtratio.

In figuris ſimilibus ea coincidunt, quae a ſe invicem diſcerni debent (§. 124 Arith.). Quare cum figurae nequeant diſtingui niſi per angulos, et latera; illi aequales (§. 174), haec proportionalia eſſe debent (§. 154 Arith.). Q. e. d.

Scholion.

176. Sermo nobis tantum eſt de figuris rectilineis, quarum latera in reſpectata omnia inter ſe ſimilia ſunt. Alias addendum foret, latera homologa debere eſſe, inſuper inter ſe ſimilia, et ſimiliter poſita, e. gr. arcus circulorum ſimiles convexita:

vexitatem centro figurae obvertentes.

Theorema XVIII.

177. Figurarum sibi mutuo congruentium RTUS, etrtus anguli, et latera homologa inter se aequalia sunt. D: I. D: 25.

Demonstratio.

Quoniam figurae RTUS etrtus sibi mutuo congruunt, per hypo: iidem utriusque termini esse possunt (D: 3). Quare cum termini earum sit perimetri (D: 31); una rtus supra alteram RTUS ita poni potest, ut tu ipsi TU, tr ipsi TR, rs ipsi RS et congruat. Ergo latera homologa sunt inter se aequalia (D: 161). Quod erat unum.

Sunt vero T et t, R et r, S et s et vertices, TU, TR, RS, SU et tu, tr, rs, su crura angulorum homologorum (D: 54). Quamobrem, et anguli homologi aequales sunt (D: 163). Q. e. alterum.

Scholion.

Scholion

178. Patet ex scholio praecedente, quomodo idem theorema ad figuras quoque non rectilineas extendatur.

Caput III.

De Linearum rectarum, et Triangulorum Symptomatis.

…I.
19.

Theorema XIX.

179. Si in duobus triangulis ABC et abc fuerit A = a, AB = ab, AC = ac; erit etiam BC = bc, C = c, B = b totaque triangula aequalia, et similia ~~[illegible]~~ erunt.

Demonstratio.

Concipiamus triangulum abc ita poni super alterum ABC ut

ut punctum a supra A, et recta ab super
AB cadat. Quoniam ab = AB, a = A,
et ac = AC per hypoth: punctum b super
B (§. 168), recta ac super AC (§. 166), et
punctum c super C (§. 169), consequen:
ter bc super BC (§. 170) cadit, adeoque
Δ abc alteri ABC congruit (§. 3), con:
sequenter bc = BC (§. 161), c = C, et
b = B (§. 167), totaque triangula aequa
lia, et similia sunt (§. 161). Q. e. d.

Problema VIII.

180. Datis duobus lateribus AB, et AC cum angulo intercepto A triangulum construere. T: T: 14

Resolutio.

1. Assumto AB pro basi, in A construatur angulus datus (§. 155).
2. In crus ejus alterum transferatur altera datarum AC.
3. Tandem ducatur recta BC. Erit ABC triangulum desideratum (§. 179).

Scholion

Scholion.

181. Tyrones latera et angulos datos in numeris aſſumant: quod in aliquibus caſibus ad demonſtrationes empiricas diſtinctius percipiendas proderit, quas ſupra (§. 155) commendavimus.

Corollarium I.

182. Determinatis adeo duobus lateribus cum angulo intercepto, tota triangula determinantur.

Corollarium II.

183. Quare ſi in duobus triangulis ACB, et acb fiat $a = A$ et $ab : ac = AB : AC$; triangula eodem modo determinantur (§. 119), adeoque ſimilia ſunt (§. 120), conſequenter etiam $c = C$, et $b = B$, $ab : bc = AB : BC$ & (§. 175).

Theorema XX.

T. III. F. 44. 184. In triangulo aequicrurio DFE

1°.

1°. anguli ad basin y et u sunt aequales; 2°. recta FG, quae angulum DFE bifariam secat, basin quoque DE et 3°. in angulum ipsum bifariam secat: immo 4°. FG ad basin DE perpendicularis.

Demonstratio.

Nam o = x, et hypoth. DF = FE (§. 89) et FG = FG (§. 81 cttis.). Ergo 1°. y = u, 2°. DG = GE, 3°. △ DFG = △ GFE (§. 179). Et quia etiam anguli ad G aequales, (per §. cit.) 4°. FG ad DE normalis est (§. 79). Q. e. d.

Corollarium.

185. Cum triangulum aequilaterum sit etiam aequicrurum (§. 88. 89), theorema praesens de aequilatero etiam verum est.

Theorema XXI.

186. In triangulo aequilatero A BC omnes anguli sunt inter se aequales.

Demon=

Demonstratio.

Est enim AG = GB (§. 88). Ergo A = B (§. 184). Est vero etiam AG = AB (§. 88). Ergo G = B (§. 184). Quare A = G (§. 81 Arith.) (Q. e. d.)

Corollarium.

187. Triangulum itaque aequilaterum est etiam aequiangulum (§. 105).

Theorema XXII.

T. IV. F. 55. 188. Si trianguli ABC latus unum AC continuetur in D; erit angulus externus DAB major quolibet interno opposito B vel C.

Demonstratio.

Concipiatur AB, bifariam divisa in F ductaque recta CF producenda in G (§. 21), donec fiat FG = FC. Quoniam GC secat AB in F (§. 50), erit z = y (§. 156, consequenter o = x (§. 179). Sed DAB > o (§. 84 Ar.). Ergo

Ergo est DAB > x (§. 89 coroll.). Eodem modo ostenditur esse DAB, aut, quod perinde est (§. 156), ejus verticalem HAC > ACB. Q. e. d.

Theorema XXIII.

189. In omni triangulo ABC (Fig. 1 II. tab. I) Latus majus AC opponitur majori angulo B, minus AB minori C, et contra.

Demonstratio.

Quoniam AB < AC (ex hypoth.) parti hujus AD aequalis est (§. 100 constr.). Ducatur recta BD (§. 117). Erit DAB triangulum aequicrure (§. 89), adeoque o = x (§. 184). Sed o > C (§. 188). Ergo x > C (§. 89 ax.), consequenter multo magis B > C. Quod erat unum.

Sit B > C, ex hypoth. Si non sit AC > AB, erit vel AC = AB, vel AC < AB, adeoque in casu primo B = C

$= C$ (§. 184), in altero $B < C$, q. demonstrabatur. Sed cum utrumque Hypothesin evertat, absurdum est; consequetur si angulus $B > C$, etiam $AC > AB$. Quod erat alterum

Theorema XXIV.

T. IV. F. 57. 190. In omni triangulo ABD duo latera AD, et BD simul sumta sunt tertio AB majora.

Demonstratio.

Producatur AD in C (§. 121), donec fiat $BD = DC$, adeoque $AC = AD + DB$ (§. 88 Arith.): erit Δ aequicrurum (§. 89) et linea $y = C$ (§. 184), consequenter $C < x + y$ (§. 48 Arith.). Quare AC seu $AD + DB > AB$ (§. 189). Q. e. d.

Theorema XXV.

T. I. F. 2. 191. Linea recta AB est brevissima omnium, quae intra eosdem terminos A, et B continentur.

Demonstra:

Demonstratio.

Sit curva quaecunque ACB. Ducantur rectae AC, et CB: erit AC + CB > AB (P. 190). Ducantur porro rectae AD, et DC, item CE, et EB: erit AD + DC > AC, et CE + EB > CB (P. cit.) consequenter AD + DC + CE + EB > AC + CB (P. 90 Arith.), adeoque multo magis AD + DC + CE + EB > AB. Quodsi plures ducas subtensas; erit earum aggregatum demum majus ipsa AB. Quare cum illae subtensae cum curva tandem coincidant, erit ea major, recta AB intra eosdem terminos contenta. Est ergo recta AB minor curva quacunque intra eosdem terminos contenta, hoc est omnium linearum brevissima, quae ab A usque ad B duci possunt. Q. e. d.

Corollarium

Corollarium I.

192. Distantia ergo puncti A a puncto B in plano est linea recta (§. 15: 30): cumque inter duo puncta non= nisi unica linea recta contineri pos= sit (§. 170); via in plano brevissima est numero unica.

Corollarium II.

193. Singula itaque peripheriae pun= cta a centro circuli aequaliter di= stant (§. 37).

Problema IX.

T. III. F. 42. 194. Metiri distantiam duorum locorum A, et B ex eodem tertio C accessorum.

Resolutio

1. In loco C ad arbitrium electo de= figatur baculus.
2. Linea AC transferatur ope fu= nis, et catenae ex C in a, ita ut baculus in a defigendus sit cum

C et A

C, et A in eadem recta (§. 115.)
3. Eadem ratione ex C in b transferatur linea CB.
4. Investigetur longitudo rectae ab (§. 106.) Dico ab esse aequalem distantiae quaesitae.

Demonstratio.

Cum Loca A, et B punctum instar in eodem plano sitorum considerentur, eorum distantia est recta AB (§. 192.) Quoniam vero Aa, et Bb sunt lineae rectae (per constr.; et se mutuo secant in C (§. 50.)

erit $x = y$ (§. 156.)

Praeterea $aC = CA$ } (Per constr.)
$bC = CB$

Ergo $ba = AB$ (§. 179.) Q. e. d.

Aliter

1. Collocato instrumento goniometrico in C investigetur quantitas (§. 4[illegible]) x (§. ~~[illegible]~~ 152.)

2. Quaeratur porro longitudo, secta-
rum AB, et BC (§.125).
3. Ex datis ~~cruribus~~ cruribus AC, et
CB cum angulo intercepto x con-
struatur juxta scalam geometri-
cam modicam triangulum acb
(§.180).
4. Inveniatur in eadem mensura lon-
gitudo basis ab (§.126).
Iidem numeri indicabunt distanti-
am AB in ea mensura, qua in campo
usus est.

Demonstratio.

Est enim x=x, et ac:cb=AC:CB,
per constr: consequenter cb:ab=CB:A
B (§.183). Ergo iidem numeri, qui re-
spondent sectis cb, et ab in mensura
modica, etiam sectis CB et AB in
majore respondent (§.185) q.e.d.

Aliter.

D.III.
F.43. 1. In mensula Geometrica in D ho-
rizon:

rizontaliter collocata aſsumatur punctum c, et in eo acicula defigatur, ad quam

2. applicata applicata regula cum dioptris tamdiu huc illucque moveatur, donec per ea proſpicienti punctum **B** occurrat, ducaturque in hoc regulae ſitu recta cb.
3. Similiter collineatio fiat in punctum **A** ducaturque ca.
4. Inveſtigetur longitudo rectarum cA, et cB (§: 126) et
5. Ex menſura modica transferantur lineae iſtis proportionales ex c in a, et b.
6. Jandem in eadem menſura inveniatur longitudo ipſius ab (§: 126).

Iidem numeri indicabunt diſtantiam **AB** in menſura majore, qua in campo uſus es.

Demon=

Demonstratio.

Coincidit cum proxime praecedente.

Scholion I.

P. III. P. 45. 195. Quod si angustia spatii non permittit, ut integrae AC, et BC in a, et b transferantur; poterunt aC, et BC fieri $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ &c. ipsarum AC, et BC: quo in casu eodem modo ut in resolutione secunda demonstratur, esse ab = $\frac{1}{2}$, vel $\frac{1}{3}$, vel $\frac{1}{4}$ &c. ipsius AB.

Scholion II.

196. Debent Tyrones artificium, quo demonstrationes Geometricas non modo ad facillimam intelligentiam reducere, sed et proprio Marte invenire possunt. Nimirum quicquid, vel ex constructione problematis, aut hypothesi Theorematis, vel ex conspectu figurae utramque repraesentantis, distincte cogno:

Scitur

scitur, & characteres diſtinctè ex=
primatur; veluti in demonſtra=
tione prima praeſentis, quod x=
y, aC = AC, et bC = BC. Quo facto
diſpiciatur, cujusnam Theorematis
antecedentium hypotheſis in iis con=
tineatur: theſis enim illius theo=
rematis oſtendit, quid ex iis conſe=
quatur; veluti in noſtro exemplo, quod
ab = AB. Cum vero maxima de=
monſtrationum pars ex paucis de
congruentia, et ſimilitudine trian=
gulorum theorematis derivetur, eo=
rundem recordatio tandem fami=
liariſſima evadat opus eſt.

Theorema XXVI. T. I.

19. Si ex punctis extremis C et F. 5.
O rectae alicujus radiis CP, et PO, qui
junctim ſumti recta CO majores
ſunt, deſcribantur circuli; ii ſe mu=
tuo ſecabunt.

Demon=

Demonstratio.

Sit CP < CO; erit parti cujus veluti CN aequalis (§. 105 Arith.), adeoque ipsi congruit (§. 108). Quare si ex centro C, radio CP circulus PNQP describatur (§. 131); erit punctum N in peripheria ipsius (§. 193). Eodem modo ostenditur, si ex centro O, radio OP describatur circulus; fore punctum M in peripheria ipsius. Cum ergo CN + NO < CP + PO, per hypoth., et CP = CN (§. 40); erit NO < PO (§. 91 Arith.). Sed PO = MO (§. 40 et per demonst.). Ergo NO < MO (§. 89 Arith.). Quare punctum N peripheriae circuli PNQP cadit intra circulum PMRP, consequenter circuli se mutuo secant (§. 52). Quod erat unum.

Nec absimili modo idem ostenditur, si fuerit CP > CO, vel CP = CO.

O. Quod erat absurdum.

Problema X.

198. Super data recta AB trian=gulum aequilaterum construere. E. I. P. 16.

Resolutio.

1. Ex A tanquam centro intervallo ipsius AB describatur arcus, et

2. Ex B eodem intervallo alius (§. 131) qui priorem in C interfecabit.

3. Ducantur rectae AC, et CB: erit ACB triangulum aequi=laterum.

Demonstratio.

Etenim AC = AB et BC = AB (§. 40). Ergo AC = BC (§. 8, Arit.) Quare triangulum ABC est aequilaterum (§. 88) Q. e. d.

Problema XI.

199. Data basi DE, et crure DF, quod

quod illa dimidia majus sit, trian:
gulum aequilaterum construere.

Resolutio.

D.I. 1. Ex uno basis extremo **D** inter:
D.11. vallo cruris dati **DF** describa:
tur arcus, et

2. ex altero extremo **E.** eodem in:
tervallo arcus alius (D. 131), qui
ob **DF+EF>DE** (p. hypo:, et con:
stru: priorem in **F** intersecabit
(D. 19).

3. Ducantur rectae **DF**, et **EF** (D.
121). Dico **DFE** esse triangulum
aequicrurum.

Demonstratio.

DF=FE, (p. constr.) Ergo **EDF**
est triangulum aequicrurum (D.
89). Q. e. d.

Corollarium I.

200. Determinationis ergo basi
DE, et cruri **DF** totum triangulū
aequi:

aequicrurum determinatur.

Corollarium II.

201. Duo igitur triangula ae-quicrura **DFE**, et dfe eodem modo determinantur, si fiat **DF** : **DE** = = df : de (§. 119), consequenter simi-lia (§. 109), adeoque sibi mutuo ae-quiangula sunt (§. 175, et 109).

Theorema XXVII. §. III.

202. Duo semicirculi **GLF**, et **DG** §. 45. **GF** nonnisi in puncto unico **G** se mutuo secare possunt.

Demonstratio.

Secent enim, si fieri possit, prae-terea se etiam in **L**. Ducantur ex centris **A**, et **B** ad puncta intersectio-num **L**, et **G** rectae **AL**, **AG**, **BL**, **BG**; puncta item intersectionum connectantur recta **GL** (§. 101). Quo-niam **BL** = **BG** (§. 40), erit **BGL** = **BLG** (§. 184). Sed **BGL** > **AGL** (§. 64

84 etiis.) ergo BLG > AGL (§. 89 etiis.) Porro quia AL = AG (§. 40), AGL = ALG (§. 184) Quare BLG > ALG (§. 89 etiis.) quod cum sit absurdum (§. 84 etiis.), duo semicirculi nonnisi unico in puncto se mutuo secare possunt. Q. e. d.

Corollarium.

203. Ergo duo integri circuli non nisi duobus in punctis se mutuo secare possunt.

T. I. F. 41.

Theorema XXVIII.

204. Si in duobus triangulis ACB, et acb fuerit AC = ac, AB ab, BC = bc, etiam A = a, B = b, C = c, totaque triangula aequalia sunt et similia.

Demonstratio.

Ex centro A, radio AC, descriptus concipiatur arcus y, et ex centro B radio BC, alius x (§. 121).

Conci-

Concipiamus porro △ acb ita poni supra △ ACB, ut punctum a supra A, et recta AB super ab cadat. Quoniam AB = ab, per hypoth. punctum b super B cadet (§. 169). Et quia AC = ac, et bc = BC, per hypoth. recta ac in arcu y, et bc in arcu x terminabitur (§. 173) consequenter punctum c super C cadet (§. 101), et rectae ac, bc, rectis AC, BC congruet (§. 170). Quare a = A, b = B, c = C (§. 16?), cumque △ acb alteri ACB congruat (§. 3), △ acb =, et ∾ △ ACB (§. 151). Q. e. d.

Problema XII.

105. Datis tribus lateribus AB, BC, CA, quorum duo simul sumta AC, et BC tertio AB majora sunt, triangulum construere. §. I. §. 18

Resolutio.

1. Assumta AB pro basi ex A intervallo

tervallo ipsius **AC** describatur arcus, et
a ex **B** intervallo ipsius **BC** arcus
alius x (§. 131), quod $AC + BC > A$
B (§. Hypoth.), priorem in **C** secabit
(§. 197).

3. Ducantur rectae **AC**, et **BC** (§.
121). Ita factum est, quod petebatur.

Corollarium ~ I ~.

206. Cum ex tribus datis rectis
non nisi unicum triangulum constitui
possit (§. 204); determinatis tribus
Lateribus, totum triangulum de=
terminatur.

Corollarium II.

207. Quare si duobus triangulis
ACB, et acb, fiat $AC : AB = ac : ab$,
$AC : BC = ac : bc$; triangula eodem
modo determinantur (§. 119), conse=
quenter similia (§. 120), adeoque
sibi mutuo aequiangula sunt
(§. 175. 109).

Problema.

Problema XIII.

208. Angulo dato **DAE** aequalem bac conſtituere.

Reſolutio.

I. In charta

1. Ex **A** intervallo **AC** deſcribatur arcus **BC**, erit **AB** = **AC** (§. 40).
2. Ducatur recta ac = **AC**, et ex a intervallo ipſius **AB** deſcribatur arcus x, item
3. Ex c intervallo ipſius **CB** alius y, qui ob **AB** + **BC** > **AC** (§. 190), ſeu ab + bc > ac (§. 190), priorem in b interſecabit (§. 19?).
4. Ducatur recta ab (§. 101).

Dico eſſe a = **A**.

II. In Solo

1. Defigatur baculus in **C** cum **A**, et **E**, itemque alius in **B**, cum **A**, et **D** in eadem recta (§. 125).

2. Ind

2. In a, et c defigantur baculi ea le-
ge, ut sit ac aequalis **AC**.
3. Ad eos funis, vel catena ita ap-
plicetur, ut pars ipsius ab =
AB, et altera cb = **CB** fiat.
4. In b defigatur baculus
Dico esse bac = **BAC**
Interdum etiam in solo ubi licet
modo priore.

Demonstratio

In utroque casu ac = **AC**, ab =
= **AB**, cb = **CB** per constr: ergo bac
= **BAC** (P. 104). Q. e. d.

Problema XIV.

P: III 109. Angulum datum **HIK** in
P: 47. duas partes aequales dividere.

Resolutio.

1. Ex centro **I** ducatur radio quo-
cunque arcus **LM** (F. 131)
2. Ex **L** et **M** intervallo dimidia
LM majore ducantur arcus se

mutuo

mutuo ſecantes in **N** (§. 197).

3. Ducatur recta **IN** (§. 101).

Dico eſſe **HIN = NIK**.

Demonſtratio.

Eſt enim **IL = IM** (§. 40) **LN = MN**, et conſtr: **IN = IN**. Ergo **HIN = NIK** (§. 204). Q. e. d.

Problema **XV**.

210. Lineam rectam **AB** in duas partes aequales dividere, et in medio ejus perpendicularem erigere. T. II F. 50

Reſolutio.

1. In charta
2. Ex **A** et **B**, intervallo dimidia **AB** majore, ducantur arcus ſe mutuo in **C** ſecantes (§. 197).
2. Fiat similis interſectio infra lineam in **D** (§. cit.).
3. Ducatur recta **DC** (§. 101)

Dico eſſe **AE** aequalis **EB**.

Demon=

Demonstratio.

△ **ACB** est aequicrurum (§. 198) et recta **CED** dividit angulum **ACB** bifariam (§. 209). Ergo eadem recta **CD** dividit **AB** bifariam in **E**, et ad **AB** in **E** perpendicularis (§. 184). Q. e. d.

Aliter.

III. 1. Ponatur circinus in **A**, et eousque aperiatur, donec medium lineae attingere videatur in **D**.
§. 51.

2. Intervallum **AD** transferatur ex **B** in **E**: quo facto

3. Quo facto non difficile est determinatu punctum medium **F**.

II. In Solo.

1. Filum longitudini lineae **AB** aequale complicetur, ut punctu medium inveniatur.

2. Hoc acicula infixa notetur, et filum lineae datae ursus coextendatur.

3. Ad

3. Ad punctum medium baculus in tena defigatur.

Scholion.

an. Duo modi posteriores equidem secandi rectam bifariam mechanici dicuntur, non geometrici, quia tentando res peragitur: illorum tamen in praxi egregius est usus.

Problema XVI.

an. Ex puncto G in recta ML dato perpendicularem GI excitare.

Resolutio.

1. Inclaiba F. III

1. Posito circino in G, arbitrario intervallo resecentur utrinque partes aequales GK, et GH. F. 4

2. Ducatur recta GI (F. III), quae erit ad ML perpendicularis.

Demonstratio.

Nam KG = GL, et KI = IH per constru: IG = IG. Ergo anguli

guli ad G sunt aequales (§. 104), con-
sequenter IG ad ML perpendicu-
laris (§. 9). Q. e. d.

Aliter.

§. II. 1. Normae, hoc est, instrumenti
§. 52. ex duabus regulis ad angulum
rectum junctis compositi crus
unum ita applicetur ad rectam
ML, ut anguli vertex supra
punctum datum G cadat.

2. Ducatur juxta crus alterum re-
cta IG (§. 121), quae erit ad
ML perpendicularis.

Demonstratio.

Angulus normae est rectus, per
hypoth., sed ipsi aequalis est IGL (§.
107): ergo IGL est itidem rectus
(§. 145), adeoque IG ad ML per-
pendicularis (§. 19).

II. In Solo

Norma utimur majore, et juxta
ta

tis cauſ GI filum extenditur, tus

1. Filum KIH in duas partes ac= T: II
quales in I diviſum ex pun= T: 45
ctis KH extenditur; et

2. In I baculus defigitur, tandem=
que

3. KH bifariam ſecatur in G (P.
110) Dico eſſe GI ad KH perpen=
dicularem.

Demonstratio.

Cum KI = HI, et KG =
GH, & conſtruct. GI = GI. An=
guli ad G deinceps poſiti sunt
aequales (P. 104), conſequenter
IG ad ML normalis (P. 19) Q.e.d.

Theorema XXIX.

113. Ex puncto D ſuper eadē T. IV
recta AB nonniſi perpendicula= T: 53
ris unica GD erigi poteſt in eo=
dem Plano.

Demonſtratio

Demonſtratio.

Si fieri poteſt, ſit praeterea DE ad idem punctum D perpendicularis, quae intra crura anguli ADC cadat: erit ADE angulus rectus (§. 78). Et quoniam CD perpendicularis ad AD, per hypo: ADC ſimiliter rectus eſt (§. eis.), conſequenter ADE = ADC (§. 145): quod cum ſit abſurdum (§. 84. Arith.), ED ad AB perpendicularis eſſe nequit. Q. e. d.

Theorema XXX.

§. III. 214. Si recta CD perpendicularis
§. 53. ad DB continuetur in F, erit etiam DF ad DB perpendicularis.

Demonſtratio.

Quoniam CD perpendicularis ad DB per hypo: angulus x rectus eſt (§. 78). Ergo y ſimiliter rectus eſt (§. 65), conſequenter DF perpendicu:

dicularis ad DB (§. 78). Q. e. d.

Theorema XXXI.

215. Si duo puncta H, et Q alicujus rectae HI a duobus punctis K et L alterius rectae MN utrinque aequaliter distent; erit HI ad MN perpendicularis. §. IV.

Demonstratio.

Quoniam punctum H et Q utrinque a punctis K et L aequaliter distant, per hypoth. HK = HL, et QK = QL (§. 192). Est vero etiam QH = QH. Ergo o = x (§. 204), consequenter cum HI = HI anguli ad I aequales (§. 179), adeoque HI ad MN perpendicularis (§. 79). Q. e. d.

Problema XVII.

216. A dato puncto H ad rectam MN perpendicularem HI demittere. §. IV. §. 54.

Resolutio.

I. Incidatur

i. Posito

1. Poſito circino in **H** intervallo arbitrario, eodem tamen, interſecetur **MN** in **K**, et **L**.

2. Ex **K** et **L** fiat interſectio in **Q** (P. 197).

3. Ducatur ꝑ **O** recta **HI** (P. 111).
Haec erit ad **MN** perpendicularis.

Demonſtratio.

Quoniam **KH** = **LH**, et **KQ** = **LQ** ꝑ conſtru: puncta **H**, et **Q** a punctis **K**, et **L** utrinque aequaliter diſtant (P. 292). Ergo **HI** ad **MN** perpendicularis (P. 215). Q. e. d.

Aliter.

P. 11. P. 51. 1. Applicetur norma ad lineam datam **ML**, ita ut eius unum eandem ſtringat, alterum vero punctum datum **I** attingat.

2. Ducatur recta **GI** (P. 121), quae ad **ML** perpendicularis erit.

Demon=

Demonſtratio.

Eadem eſt quae in caſu ſimili problematis 10. (§. 212.

II. In ſolo.

Aut utimur norma majore, ut in probl: 10. aut

1. Tunc ex H extenſo deſignatur pun=cta K, et L, et in iis baculi defi=gunt. §. IV. §. 54.

2. Intervallum KL dividitur bifa=riam in I (§. 210.)

Dico baculos in H, et I defixos per=pendicularem HI deſignare.

Demonſtratio.

Quoniam KH = LH, et KI = LI, et conſtr: HI = HI; anguli ad I ſunt aequales (§. 204.), adeoque HI ad MN perpendicularis (§. 19.) Q. e. d.

Theorema XXXII.

111. A dato puncto H ad eandem re=ctam LM non niſi unica perpendicu=laris §. IV. §. 55.

-ris HI duci poteſt

Demonſtratio.

Ducatur, ſi fieri poteſt, adhuc alia HK ad LM ibidem perpendicularis, erit, erit o rectus (§. 18). Quia HI ad LM perpendicularis, eſt ſuppo: erit x quoque rectus (§. cit.). Eſt vero o > x (§. 188), adeoque unus rectus altero recto major: quod cum ſit abſurdum (§. 145), a puncto H ad LM nonniſi unica perpendicularis duci poteſt. Q. e. d.

Theorema XXXIII.

P. IV.
P. 56. 118. In omni triangulo rectangulo HIK angulus nonniſi x rectus eſt; reliqui H, et K ſunt acuti.

Demonſtratio.

Angulus y rectus eſt (§. 79). Sed y = m, item y > H (§. 188). Ergo K, et H ſunt recto minores, adeoque acuti (§. 66). Q. e. d.

Corolla

Corollarium I.

219. Angulorum igitur maximus in triangulo rectangulo est rectus.

Corollarium II.

220. In triangulo rectangulo latus maximum est hypothenusa. (§. 95. 189.)

Theorema XXXIV.

221. In triangulo obtusangulo P T I NO angulus obtusus non nisi unus = T ec. eius est, reliqui P et O sunt acuti.

Demonstratio.

y + x = 2 rectis (§. 147). Sed y, ut pote obtusus (per hyp.) major recto (§. 66). Ergo x recto minor. Quoniam vero x > O, item x > P (§. 188) erunt O, et P multo magis recto minores, adeoque acuti (§. 66). Q. e. d.

Corollarium I.

222. In triangulo obtusangulo angulorum maximus est obtusus.

Corolla:

Corollarium II.

223. Ergo Latus maximum, quod obtuso opponitur (§. 189).

Theorema XXXV.

P. IV. F. 56. 224. Linea perpendicularis HI est brevissima omnium, quae a puncto H ad eandem rectam LM duci possunt.

Demonstratio

Quoniam HI perpendicularis ad LM, (Hypoth.) angulus x rectus est (§. 78), adeoque HK hypothenusa, consequenter KH > HI (§. 220). Q. e. d.

Corollarium I.

225. Ergo distantia puncti a linea, vel plano, est recta ab illo puncto ad lineam vel planum perpendicularis (§. 15).

Corollarium II.

226. Quare si Linea HL fuerit ~~altius~~ [illegible]

ipſi KL parallela, cuius perpendicu- D. IV.
la quaevis ex illa in hanc demiſſa D. 58.
GE, AB, CD inter ſe aequalia, et
contra (§. 81).

Corollarium III.

227. Altitudo figurae eſt perpen-
diculum ex vertice in baſin demiſ-
ſum (§. 115.)

Corollarium IV.

228. In triangulo rectangulo D. I.
angulus K rectus (§. 94), et linea ca- D. 19.
thetus una MK ad alteram KL
perpendicularis (§. 78). Ergo ſi
KL ſumatur pro baſi, erit M ver-
tex (§. 114), adeoque MK altitudo
(§. 227).

Corollarium V.

229. Similiter in quadrato, et ob- D. I.
longo latus unum cum altero effi- D. 21.
cit rectum C, vel K (§. 98. 100) adeo- 23.
que unum ad alterum perpendi-
culare

culare (§. 78). Quodsi ergo latus unum **CD**, vel **IK** sumatur pro basi; erit **A**, vel **L** vertex (§. 114), consequenter **AC**, vel **LK** altitudo (§. 227).

Theorema XXXVI.

§. IV. 230. Si **HI** fuerit parallela, et
F. 58. **BA** perpendicularis ad **KL**; erit eadem **AB** etiam perpendicularis ad **HI**.

Demonstratio.

Fiat **EB** = **BD** ~~fuerit parall~~-~~la~~ et erigantur ex **E**, et **D** perpendiculares **EG**, et **DC** (§. 225) et **E** = **D** (§. 78. 143), consequenter **BG** = **BC**, et $y = u$ (§. 179). Sed quoniam **AB** perpendicularis ad **KL**, ~~ob~~ Hyp. ideo $u + x = o + y$ (§. 79). Ergo, et $x = o$ (§. 91 Axiom.). Quare cum porro sit **AB** = **AB**; erit, et $m = n$ (§. 179), adeoque **BA** ad **HI**

~~ob~~ perpendi

perpendicularis (§. 89). Q. e. d.

Corollarium.

231. Sunt ergo EG, AB, CD distantiae tum (rectae KL a recta HI, tum rectae HI a recta KL, §. 225), adeoque si HI parallela ipsi KL, etiam KL parallela est ipsi HI (§. 81).

Theorema XXXVII.

232. Parallelae AB, et EF eidem tertiae CD sunt etiam parallelae inter se, et parallelis parallelae sunt inter se parallelae.

Demonstratio.

Ducantur GI, et KM perpendiculares ad CD (§. 216): erunt eaedem perpendiculares ad AB et EF (§. 214. 230). Ergo GH = KL, et HI = LM (§. 226), consequenter GH + HI = KL + LM (§. 58 Arith.) hoc est, GI = KM (§. 80. 81 Arith.),

adeoque

adeoque AB parallela ipſi EF (§. 25. 81). Quod erat unum.

Poſterius patet ex prius.

Theorema XXXVIII

T. IV. F. 60. 133. Si duas parallelas AB, et CD ſecet tranſverſa EF in G, et H, erunt I:° anguli alterni y, et u ae=quales; II:° angulus externus x ae=quatur interno oppoſito u; III:° duo interni oppoſiti o, et u ſunt aequales duobus rectis

Demonſtratio

Si recta EF ſecet parallelas AB, et CD ad angulos rectos, omnia ma=nifeſta erunt ex Theorema 36 (§. 130). Si vero oblique ſecet ducantur perpendiculares GI, et KH (§. 114). Producatur GI in M, et HK in L (§. 11) donec fiat IM = GI, et KL = HK.

1:° Quoniam GI perpendicularis ad CD per conſtru: erunt anguli ad I.

I aequales (P. 9). Pono GI = IM (per constr.) et HI = IH. Ergo HG = HM, et u = z (P. 129). Eodem modo ostenditur esse HG = GL, et y = t. Quamobrem, et GL = HM (P. 87 Arith.). Est vero etiam HK = GI (P. 226) et line. HK + KL = GI + IM (P. 88 Arith.), hoc est, HL = GM (P. 86 Arith.) et GH = GH: Unde t + u = u = z (P. 204). Cum itaque t = y, et u = z (per demonstr.) erit y + y = u + u (P. 15 Arith.) hoc est 2y = 2u, consequenter y = u (P. 94 Arith.) Q. e. primum.

2° x = y (P. 150), et u = y (per n: 1°). Ergo x = u (P. 87 Arith.) Q. e. alterum.

3° x + o = 180° (P. 148). Sed x = u (per num: 2°). Ergo u + o = 180° (P. 15 Arith.) Q. e. tertium.

Problema XVIII.

234. Datis duobus lateribus A B, et BC cum angulo A uni eorum BC — F. 41.

BC opposito, triangulum ABC con=
struere.

Reſolutio.

1. Ducta recta AB, in puncto A excitetur angulus dato aequalis (§. 108), fiatque AB uni datorum laterum aequali,
2. Ex B intervallo alterius lateris dati BC crus anguli AC interſecetur in C.
3. Puncta B, et C connectantur recta (§. 111). Sic factum eſt, quod petebatur.

Corollarium I.

235. Cum ex duobus lateribus, atque anguli uno eorum opposito triangulum conſtrui poſsit, iis datis, reliqui anguli, et crus reliquum una determinantur. Quare si in duobus triangulis ABC, et abc fuerit AB = ab, BC = bc, et A = a; erit etiam AC = ac

= ac, B = b, C = c, et △ ABC = △ abc:
nulla enim subest ratio, cur triangula
ex aequalibus datis constructa inae=
qualia forent.

Scholion.

236. In genere figuras aequalia esse,
quae aequalia determinantur, et a
quod perinde est, figuras esse aequa-
les, quae ex aequalibus datis eodem
modo construuntur. Unde non so=
lum triangulum, verum etiam reli=
quarum figurarum congruentia ex
hoc principio demonstrari potest.

Corollarium II.

237. Quodsi in duobus triangulis
ABC, et abc fuerit A = a, et AB : B
C = ab : bc, triangula eodem modo
determinantur (§. 119), adeoque si=
milia sunt (§. 120), consequenter eti=
am B = b, C = c, BC : CA = bc : ca,
et CA : AB = ca : ab (§. 125).

Theorema.

Theorema XXXIX.

D: IV. 238. Perpendicula KH, et GI
P: 60. aequales parallelarum partes KG, et HI intercipiunt.

Demonstratio.

KH = GI (P: 230. 226), u = y (P: 233), et GH = GH. Ergo KG = HI (P: 235). Q: e: d.

Theorema XL.

D: IV. 239. Si trianguli cujuscunque
P: 61. ACB latus unum BC continuetur in D, erit angulus externus DCA aequalis duobus internis oppositis y, z simul sumtis.

Demonstratio.

Ducatur CE. basi AB parallela, erit x = y, et o = z (P: 88 et hic.) Q: e: d.

Theorema XLI.

D: IV.
P: 61. 240. In quovis triangulo ACB tres anguli y, u, z junctim sumti sunt ae-

quales

quales duobus rectis seu 180°.

Demonstratio.

Nam $o + x = y + z$ (§. 239). Ergo $o + x + u = y + z + u$ (§. 88 Arithm.) sed $o + x + u = 180°$ (§. 147): ergo $y + z + u = 180°$ (§. 81 Arith.). Q. e. d.

Corollarium I.

241. In triangulo igitur rectangu- T. I. lo MKL duo anguli obliqui M, et F. 19. L junctim sumti efficiunt rectum seu 90°, adeoque semirecti sunt, et triangulum fuerit aequicrurum (§. 184).

Corollarium II.

242. Si unus angulus est obtusus, duo reliqui simul sumti sunt recto minores (§. 66).

Corollarium III.

243. In triangulo aequilatero A T. I. C B quilibet angulus est 60°, nimi- F. 10. rum 180 : 3 (§. 186).

Corollari-

Corollarium IV.

244. Cum itaque in triangulo rectangulo necessario angulus unus sit rectus (§. 91.); triangulum rectangulum aequilaterum esse nequit.

Corollarium V.

245. Si unus trianguli angulus ex 180° subtrahitur, summa duorum reliquorum relinquitur; et si summa duorum ex 180° auferatur, residuus fit tertius.

Corollarium VI.

246. Si duo anguli unius trianguli aequentur duobus alterius, sive sigillatim, sive junctim; etiam tertius unius aequalis est tertio alterius (§. 91 et 116.).

Corollarium VII.

§. IV. §. 61. 247. In quovis triangulo anguli ad basin y, et z, junctim sumti sunt duobus rectis minores.

Corolla:

Corollarium VIII.

248. Quoniam in triangulo aequicruro DFE anguli ad basin y, et u aequales sunt (§. 184), si angulus T: II
ad verticem F subtrahitur a 180°, et F: 61
residuum bisecatur, unus angulorum aequalium y, vel u prodit. Similiter si duplum anguli unius ad basin y a 180° subtrahitur, angulus ad verticem F relinquitur.

Problema XIX.

249. In extremitate F lineae F T: IV
G perpendicularem FH excitare. F: 61

Resolutio.

1. Super FG construatur △ aequilaterum FIG (§. 189).
2. Producatur GI in H (§. 121), donec fiat HI = GI.
3. Ducatur recta HF (§. 121) quae erit ad FG perpendicularis.

Demonstratio.

Quoniam △ FIG est aequilate-

rum

—ium (per conſtr.) $o = 60°$, et $u = 60$ (§. 243). Ergo $y = 120°$ (§. 234), conſequenter et FI = HI (per conſtr.) $x = 30°$ (§. 248). Cum adeo $x + o = 90°$, angulus ad F rectus (§. 144) et HF ad FG perpendicularis eſt (§. 78). Q. e. d.

Theorema XLII.

IV. F. 63. 250. Si recta DE ſecet rectam AB in C, non alibi eandem denuo ſecabit.

Demonſtratio.

Occurrat enim, ſi fieri poteſt, recta DE alteri AB in alio adhuc puncto, e. gr. in A: erunt rectae ADCE puncta duo A, et C in recta altera AB, conſequenter recta ADCE tota ſupra AB cadit (§. 70) atque adeo eam non ſecat (§. 30) quod cum hypotheſi repugnet, DE non alibi, quam in C, ipſam AB ſecare

ſecare poteſt. Q: e: d. T. I.

Theorema XLIII. T. 41

181. Si in duobus trianguliſ ABC, et abc fuerit AB = ab, A = a, et B = b; erit etiam AC = ac, BC = bc, C = c, et $\triangle$ ACB = et ∽ $\triangle$ acb.

Demonſtratio.

Concipiamus $\triangle$ abc poni ſupra alterum ABC, itaut punctum a ſuper A, et recta ab ſuper AB cadat. Quoniam ab = AB, a = A, et b = B, p. hypoth: punctum b ſuper B (T. 169), recta ac ſuper AC, et bc ſuper BC (T. 167), conſequenter c ſuper C cadit. Cum adeo $\triangle$ abc alteri ABC congruat (T. 3), erit ac = AC, bc = BC, c = C (T. 177), et $\triangle$ abc =, et ∽ $\triangle$ ABC (T. 161). Q: e: d.

Corollarium.

182. Si in duobus trianguliſ ACB

et

et acb fuerit A = a, B = b, et BC = = bc; erit etiam C = c (§. 246), consequenter AC = ac, AB = ab, et △ ACB = et ∽ △ acb (§. 251).

Theorema XLIV.

253. Si in triangulo DFE anguli ad basin u, et y aequales; triangulus est aequicrurum.

Demonstratio.

E. III. Secet FG angulum F bifariam
P. 44. (§. 209); erit DF = FE (§. 252). Est ergo △ DFE aequicrurum (§. 89). Q. e. d.

Corollarium.

~~Theorema~~

254. Si ergo tres anguli fuerint aequales; aequilaterum est (§. 88).

Theorema XLV.

255. Si duas lineas AB et CD
E. IV. secet transversa EF in G et H,
P. 60. ita ut vel 1°. y = u; vel 2°. x = u; vel

vel 3.° o + u = 180°; erunt lineae iſtae inter ſe parallelae.

Demonſtratio.

1. Demittantur ex H, et G perpendiculares HK, et GI (§. 117.) erit K = I (§. 78. 145.) Eſt vero, et I = u per hypot. et HG = HG. Quare HK = GI (§. 152.) conſequenter cum HK, et GI ſint diſtantiae linearum AB, et CD (§. 115.); lineae AB, et CD ſunt inter ſe parallelae (§. 81.) Quod erat primum.

2. x = u per hypoth. x = y (§. 150.) Ergo y = u (§. 87. Axio.), conſequenter AB, et CD ſunt inter ſe parallelae, per num. 1. Quod erat ſecundum.

~~3. x = u per hypot.~~

3. o + u = 180°, per hypoth. Sed o + x = 180 (§. 147.) Ergo u = x (§. 87. Axio.)

87) Ariom, conſequenter AB, et CD ſunt inter ſe parallelae, num: a. Quod erat tertium.

Theorema XLVI.

IV. 256. Si duae lineae EG, et AB fue: :58. rint perpendiculares ad eandem ter: tiam HI, erunt inter ſe parallelae.

Demonſtratio.

Fiat AB = EG ducaturque recta KL; erit HI ipſi KL parallela (§. 81), conſequenter EB = GA (§. 238). Quare cum etiam ſit EG ipſi AB parallela (§. 253). Q: e: d.

Theorema XLVII.

IV. 257. Parallelae DF, et GA inter eaſ: :64. dem parallelas FA, et DG ſunt ae: quales. Et contra, ſi DF, et GA fue: rint parallelae, et aequales, erit eti: am FA ipſi DG parallela, et aequalis.

Demonſtratio.

Ducatur recta DA (§. 121). erit

x = y

x = y, et o = u (§. 133). Quare cum AD = AD, erit DF = GA (§. 151). Quod erat unum.

DF = AG, per hypoth: et cum eaedem lineae sint parallelae, per hypo: o = u. (§. 133). Quare cum etiam sit DA = DA, erit x = y (§. 139), consequenter FA ipsi DG parallela (§. 155), adeoque etiam aequalis per num: 2. Quod erat alterum.

Problema XX.

158. Per datum punctum V parallelam rectae RS ducere.

Resolutio.

I. In charta

1. Ex V demittatur perpendicularis VK (§. 116).
2. Ex puncto quolibet T erigatur perpendicularis TA = KV (§. 117).
3. Per V, et A ducatur recta MN, quae erit ipsi RS parallela (§. 81).

Aliter

Aliter.

1. Regula ad rectam RS applice=tur, et circinus intervallo VK ape=riatur.

2. Cuius unum circini iuxta ductu regulae ab R, versus S promovea=tur.

Ita cuspis alterum ≠ V parallelam ipsi RS describet, (P: 81).

Aliter.

1. Per datum punctum V ducatur utcunque recta RG.

2. In V fiat o = x (P: 108).

Erit VN, seu MN parallela ipsi RS (P: 155).

Aliter

P: II. P: 66. Ex modo praecedente enatus est sequens.

1. Triangulum rectangulum AVN ex ligno ebenino, aut alio In=dico paratum, ita applicetur ad rectam

Rectam RS, ut basis ejus VN
parti ipsius coaequat.

2. Hypothenusae ejusdem Trianguli
AV applicetur Regula RG, quae
altera manu in Locsitu immota
detineatur.

3. Triangulum AVN juxta ductu
Regulae promoveatur, donec basis
punctum V attingat.

Erit enim in quovis situ, basis
VN, ob x = y, ipsi RS parallela.
(P: 155). Q: e: d.

Aliter

Utimur interdum Parallelismo, ex duo- T: II
bus Regulis ligneis potius, quam orichalceis T: 6.
(Fig. 121) AB, et CD composito, quae ejus-
dem ubique Latitudinis retinaculis EF,
et GH inter se aequalibus ita conjunguntur,
ut retinacula intervallis aequalibus EG, et
FH a se invicem distent, ipsae autem Regulae
variis intervallis diduci queant. Nimirum

1 Regula

1. Regula una debite applicetur ad lectam RS.
2. Altera ad datum punctum V adducatur, et
3. Juxta eijus ductum recta AB per V ducatur: quae erit ipsi RS parallela.

Demonstratio.

Ducatur obliqua linea EH (§. 111.). Quoniam EG = FH, EF = GH per constr., et EH = EH, erit o = x (§. 104.), adeoque FH parallela ipsi EG (§. 155.). Sed AB ipsi EG, et RS ipsi FH parallela per constr. Ergo AB parallela ipsi RS (§. 232.). Q. e. d.

II. In Campo

§. IV. §. 68. Commode utimur modo primo antecedentium vel

1. In puncto quolibet K defigatur baculus cum aliis in R, et S defixis in eadem recta (§. 125.).
2. Ad V fiat o = x

2. Ad V fiat o = x (§. 108).

Erit MV, quae facile produci po-
test in N (§. 125), ipsi RS parallela
(§. 255).

Aliter

1. In punctis R, et T defigantur ba- §. IV.
culi cum aliis in R, et S defixis §. 68.
in eadem recta (§. 125).
2. Fiat u = x (§. 108), et TA =
VK.
3. In M, et N defigantur baculi cum
aliis in V, et A defixis in eadem
recta (§. 125).
Erit MN parallela ipsi RS.

Demonstratio.

Quoniam x = u per constr: erit T
A parallela ipsi KV (§. 255) conse-
quenter z = y (§. 233). Est vero eti-
am TA = KV, per constru: et TV
= TV. Ergo m = n (§. 179), conse-
quenter MN parallela ipsi RS (§.
255)

255. Q. e. d.

Scholion.

259. Si parallelismis crebro utaris, retinacula continuo affrictu nimis efforantur, et a rectitudine cito recedunt ipsi parallelismi. Huic malo praesens remedium attulit Jacobus Leupoldus, artifex insignis, qui retinacula ex geminis lamellis orichalceis elasticis, in medio firmiter connexis, et capita clavorum, quibus regulis affiguntur, conica parare solet. Notum vero est, orichalcum ad elasticitatem usque vehementi contusione indurari.

Theorema XLVIII.

Tab. IV. 260. Per idem punctum C eidem
Fig. 69. rectae **DE** parallela non nisi unica
AB duci potest.

Demonstratio.

Ducatur enim, si fieri potest, adhuc

adhuc

adhuc alia HG, priorem ſecans in
G, cujus adeo pars GG efficit cum
parte alterius GB angulum BGG.
Ex I erigatur perpendicularis IL (§.
111), erit tum IK ad GG, tum IL ad
GB perpendicularis (§. 130), conſequen-
ter anguli GKI (§. 114), et GLK
recti (§. 78): quod cum ſit abſur-
dum (Prop. 4 Arith.), per G non niſi
AB ipſi DE parallela duci poteſt.
Q. e. d.

Aliter

Angulus NGH = NQD, et
NGA = NQD (§. 133). Ergo NG
H = NGA (§. 81 Arith.): quod cum
ſit abſurdum (§. 84 Arith.), HG, et
AB non ſunt ſimul ipſi DE paral-
lelae Q. e. d.

Theorema XLIX.

161. Si recta NO ſecet duas rectas (§. IV)
alias HG, et DE in G, et Q ita ut (§. 69)
duo

duo anguli interni oppoſiti HCO,
et DQN fuerint ſimul ſumti duo
bus rectis majores; lineae GH, et E
D verſus eam plagam divergunt.

Demonſtratio.

Ducatur ACB parallela ipſi
DE (§. 158); tum angulus A
CO cum angulo DQN efficiet duos
rectos (§. 138). Sed HCO, et DQN ſi-
mul ſunt duobus rectis majores (per hyp.)
Ergo HCO > ACO (§. 90 Arith.), conſequen-
ter AC intra ſpatium HCQD cadit.
Erigatur perpendicularis PS (§. 112):
erit RP = FC (§. 110), conſequen-
ter PS > PR (§. 84 Arith.) > CF (§.
89 Arith.). Diſtantiae igitur rectarum
CH, et QD verſus H, et D creſcunt (§.
115), adeoque lineae CH, et QD ver-
ſus eam plagam divergunt (§. 84).
Q. e. d.

Theorema

Theorema L.

266. Si duas rectas HG, et DE secet transversa NO in C, et Q, ita ut anguli GCO, et EQN simul sumti sint duobus rectis minores, lineae GC, et QE versus eam plagam convergunt.

Demonstratio.

Quoniam CG ipsi QE parallela esse nequit (§. 233), ducatur AB parallela ipsi DE per C (§. 258): tum angulus BCQ cum angulo EQN efficiet duos rectos (§. 233). Sed GCO, et EQN simul sumti sunt duobus rectis minores, ex hypothesi. Ergo GCO < BCQ, (§. 90 Arith.), consequenter CB extra spatium GCQE cadit. Demittantur perpendiculares LI et CF (§. 218) ~~consequenter~~ erit CF = IL. (§. 226) consequenter IK < IL. (§. 84 Arith.)

∠CF

a CF (§. 89 Arit.). Distantiae igitur rectarum CG, et QF decrescunt versus G et E (§. 125), adeoque lineae CG, et QE versus eam plagam convergunt (§. 83). Q. e. d.

Corollarium.

163. Si anguli GCQ, et EQC simul sumti fuerint duobus rectis minores; erunt ipsi deinceps positi duobus rectis majores (§. 147). Quare lineae, quae versus unam plagam convergunt (§. 162), versus oppositam divergunt (§. 161).

Problema XXI.

T. I. F. 18. 164. Datis recta AB, et angulis adjacentibus A, et B, qui junctim sumti duobus rectis minores sunt, triangulum ABC describere.

Demonstratio.

1. Ad datam rectam AB excitentur anguli dati A, et B (§. 155).

2. Cu-

c. Crura AC, et BC continuentur, donec sibi mutuo occurrant in C (§. 250. 262). ABC triangulum erit desideratum.

Corollarium I.

265. Data ergo linea una datisque duobus angulis, triangulum determinatur.

Corollarium II.

266. Quare si in duobus triangulis fiat A = a, et B = b; triangula eodem modo determinantur (§. 119), adeoque similia sunt (§. 120). §. 1. §. 41.

Corollarium III.

267. Si in duobus triangulis fuerit A = a, et B = b; ~~triangula eodem modo~~ consequenter in rectangulis unum obliquorum in uno aequalis uni in altero (§. 145); erit etiam C = c (§. 240) hoc est, ΔΔ ACB, et acb sibi mutuo aequiangula (§. 119).

129) Quare Δ Δ ſibi mutuo aequian-gula ſimilia ſunt (P: 205), et hinc latera homologa; ſeu aequalibus angulis oppoſita proportionalia habent (P: 175).

Theorema LI.

T: IV F: 70. 208. Si in triangulo ABC recta DE baſi AC parallela ducatur, ſegmenta crurum cruribus proportionalia ſunt, hoc eſt, BA : BC = BD : BE = AD : EC, et BA : AC = BD : DE, atque Δ BDE ∾ Δ BAC.

Demonſtratio.

Quoniam DE parallela ipſi AC erit x = y, et o = u (P: 233), adeoque Δ BDE ∾ Δ BAC, et BA : BC = BD : BE, et BA : AC = BD : DE (P: 261). Ergo et BA : BD = BC : BE (P: 173 Arit.) conſequenter AD : BD = EC : BE (P: 193 Arit.

Arith:) ſeu BD : AD = BE : EC (P. 169 Arith:), vel denique BD : BE = AD : EC (P. 113 Arith:) Q. e. d.

Theorema LII.

269\. Recta FH angulum GFE bifariam ſecans baſin GE cruri= bus adjacentibus EF, et GF pro= portionaliter ſecat. (P. 211. / P. 71.)

Demonstratio.

Producatur EF in I (P. 211), do= nec ſit FI = GF, erit o + x = y + u (P. 239). Sed o = x ex Hypo:, et y = u (P. 184), adeoque 2y = 2o (P. 15 Arith:), ergo o = y (P. 94 Arith:), conſequenter HF ipſi GI paralle= la (P. 255). Quare EF : EH = FI : GH (P. 266) = GF : GH (P. 51 Arith:) Q. e. d.

Corollarium.

270\. Et ergo, et EF : GF = EH : GH (P. 113 Arith:), conſequenter

EF +

EF + FG : EF = GE : EH (§. 190 Arith.), consequenter EF, seu E
F + FG : GE = EF : EH (§. 173 Arith.)
hoc est, ut summa crurum ad basin integram, ita crus unum ad segmentum cujus adjacens. Q. e. d.

Problema XXII.

IV. 211. Datis tribus lineis AB, A
72. C, et BD, invenire quartam proportionalem.

Resolutio.

1. Ducatur angulus non nimis acutus FAG pro arbitrio.
2. Ex A in B transferatur linearum datarum prima; ex A in C altera; ex B in D tertia.
3. Ducatur recta BC (§. 121).
4. In D constituatur angulus ipsi ABC aequalis (§. 108).

Dico, esse AB : AC = BD : CE.

Demonstra-

Demonſtratio.

Quoniam o = x, ſi conſtr: erit BC ipſi DE parallela (§.155.) Quamobrem AB : AC = BD : CE (§.108.) Q. e. d.

Corollarium I.

172. Quodſi duabus lineis AB, et AC datis tertia inveniri debet; etiam BD ipſi AC aequalis fieri, hoc eſt, AC bis poni debet. Erit nimirum AB : AC = AC : CE.

Corollarium II.

173. Si DB ſumatur pro unitate; reſpondebit CE exponenti rationis AC : AB (§.140 Arith.).

Problema XXIII.

174. Datam rectam AB in quotvis cunque partes aequales dividere. F. 13.

Reſolutio.

1. Ex recta CD pro arbitrio aſſumta reſecentur tot partes ae-

quales

quales, in quot data AB dividenda, e. gr: 5.

2. Super harum partium intervallo construatur triangulum aequilaterum CED (§: 198).

3. Ex E in a transferatur (recta AB, itidemque ex E in b.

4. Ducatur recta AB: ducantur itidem alliae ex E 1. 2. 3. &

Dico esse ab = AB, a1 = $\frac{1}{5}$ AB, a2 = $\frac{2}{5}$ AB &

Demonstratio.

Quoniam EA = EB, et EC = ED, per constr: erit Ea: Eb = EC: ED (§: 168 hic.). Quare cum angulus E ubique triangulo ECD et Eab communis sit: erit EC: CD = Ea: ab, et o = x (§: 183). Sed EC = CD per constru: Ergo Ea = AB = ab (§: 151: c hic.) Quod erat unum.

Quoniam o = x per demon: erit ba parallel-

parallela ipsi Ci (§:155), consequen=ter EC : Ci = Ea : ai (§:168), hoc est, ob EC = CD per constru; est Ea = ab, per demonstr: CD : Ci = ab : ai (§:164 Arith:). Sed Ci = $\frac{1}{5}$ CD, per constr: Ergo ai = $\frac{1}{5}$ ab (§:151 Arith:). Quod erat alterum.

Eodem modo ostenditur, esse ar = $\frac{2}{5}$ AB, consequenter ir = $\frac{1}{5}$ AB, et ita porro.

Corollarium.

115. Quodsi ergo CD fuerit utcunque divisa in i, et r; eodem modo re=cta ab secabitur in eadem ratione. §:74
Est nempe CD : Ci = ab : ai; CD : Cr = ab : ar (§:174).

Scholion.

116. Corollarii hujus usus am=plissimus est in Architectura tam civili, quam militari, praesertim ubi Ichnographiae vel ampliandae, vel contra=hendae

tendae.

Problema XXIV.

7:V. 27. Scalam Geometricam construere.
7:15.

Resolutio.

1. Ducatur recta AF, et in ea transferantur partes 10 aequales B1, 12, 23, 34 & intervallo vero 10 partium AB totidem ex B in E, ex E in F & quoties libuerit.
2. In A excitetur perpendicularis AC arbitrariae Longitudinis, in partes 10 aequales divisa (§. 249).
3. In ultimam CD transferantur partes 10 partibus ipsius AB aequales.
4. Tandem puncta 10, et 9, 9, et 8, 8, et 7 & lineis transversis connectantur (§. 121).

Dico, si AB fuerit decempeda, fore B1, 12, 23, 34 & pedes, 99 digitum unum

unum; 88 digitos duos, 77 tres, 66 quatuor &c.

Demonstratio.

$B1 = 12 = 23$ &c. $= \frac{1}{10} AB$, per constr: Sed pes est decempedae pars decima (§. 25). Ergo cum AB sit decempeda, per Hypoth: erunt B1, 12, 23 &c. pedes. Quod erat unum.

Porro quia gg est parallela ipsi Ag, per constr: $Cg : CA = gg : Ag$ (§. 168). Sed $Cg = \frac{1}{10} CA$ per constr: Ergo $gg = \frac{1}{10} Ag$ (§. 151 Arith:). Quare cum Ag sit pes, per demon: erit gg digitus (§. 25). Eodem modo ostenditur esse 88 duos, 77 tres &c. digitos. Q. e. alterum.

Scholion.

218. Quemadmodum hic linea exigua Ag in 10 partes aequales dividitur, ita eadem in quotcunque alias eodem artificio dividi potest. Neque

opus est

opus est, ut angulus A sit rectus; sed idem obliquus esse potest.

Corollarium.

279. Quodsi ergo circini cuspis unum collocatur in I, et alterum in K, erit intervallum IK = 1°4'5", et sita pono

Problema XXV.

V. 280. Invenire distantiam duorum locorum A, B, quorum unus B
F. 76. tantum accedi potest.

Resolutio

1. Baculum ad arbitrium in E defixum; (recta BE transferatur ex E in C, ita ut baculus in C defixus sit cum E, et B in eadem recta (P. 125).
2. In C constituatur angulus ECF ipsi B aequalis (P. 108).
3. Tandem ex C progrediendum versus D, donec baculus in D defixus sit cum F et C, iisdemque

cum

que cum E, et A in eadem recta (P: 125).

Dico esse DG = BA.

Demonstratio

Nam BE = EG, o = x, per constr: et y = u (P: 156). Ergo AB = DG (P: 151). Q: e: d.

Aliter.

1. Defigatur baculus in I cum B, et P: V. A in eadem recta (P: 125), ibidem = P: 77 que alia subcumque in K.

2. Ex K in L transferatur IK, in M vero KB.

3. Denique ex K progrediendum in N, donec baculus ibi defixus sit cum M, et L, ibidemque cum K, et A in eadem recta (P: 125).

Dico esse MN = BA.

Demonstratio.

BK = KM, et IK = KL, per constr: o = u (P: 150). Ergo IB = ML, et y = x (P: 179). Quare cum sit o + m = u + n (P: 150)

(P: 156) et **IK = KL** per constr: erit
IA = NL (P: 251), consequenter **AB**
= **NM** (P: 91 Arith:). Q. e. d.

Aliter.

...V. 1. Mensula Geometrica in **C** colloce-
...38. tur, per dioptras collineetur in **A**, et **B**,
ducanturque lineae ac, et cb.

2. Quaeratur distantia stationis a lo-
co accesso **AC** (P: 205); et

3. Ex Scala Geometrica in ac trans-
feratur (P: 277).

4. Translocetur Mensula in **A**, ita
ut punctum **A** ipsi immineat, et
per dioptras regulae ad ac applica-
tae baculus in prima statione **C**
defixus conspiciatur.

5. Mox collineatio in **B** fiat, ducatur-
que ab.

6. Denique in Scala Geometrica
capiatur intervallum ipsius ab
(P: 277).

Ita di-

Ita diſtantia AB quaeſita innoteſcet.

Demonſtratio.

Quoniam c = C, et a = A (ſſ. conſt. §. 107), erit ac : ab = AC : AB (§. 205). Porro eſt, iidem numeri rationes ac : ab et AC : AB indigitant (§. 149 Arith.). Q. e. d.

Aliter.

1. Baculo in C defixo inveſtigetur quantitas angulorum A, et C (§. 151), itemque longitudo ipſius AC (§. 120).
2. Ope inſtrumenti tranſportatorii, et scalae geometricae conſtruatur triangulum acb (§. 204).
3. Ad scalam geometricam applicetur ab (§. 211).

Demonſtratio.

Eadem eſt, qua proxime praecedens.

Problema.

Problema XXVI.

281. Metiri diſtantiam duorum Locorum inacceſſorum AB.

Reſolutio.

D.V. P.76. Sine inſtrumentis taediosior eſt problematis Reſolutio, quam ut commendari poſſit. Cui tamen volupe fuerit eandem experiri, is

1. Statione in E aſſumta Rectas BE, et AE inveniat (P. 280).
2. His datis, reperiet DC ipsi BA aequalem (P. 149).

Aliter.

D.V. P.79.
1. Duabus Stationibus in C, et D electis in prima C collocetur mensula, et per dioptras collineetur in D, B et A, ducanturque juxta Regulae, cui affiguntur, ductum Rectae cd, cb, ca.
2. Quaeratur diſtantia ſtationum CD (P. 205), et

3. Ex

3. Ex scala Geometrica transfe-
ratur in cd (§. 119).
4. Baculo in C defixo mensula
collocetur in D ea lege, ut pun-
ctum d ipsi D, hoc est puncto, in
quo defigebatur ante baculus,
immineat, et per dioptras regu-
lae ad ed applicatae respicien-
ti baculus in C occurrat.
5. Hinc porro collineatio fiat in
A, et B ducanturque rectae c
a, et db.
6. Tandem distantia punctorum
a, et b investigetur in Scala Geo-
metrica (§. 119).
Dico esse cd : ab = CD : AB.
Demonstratio.
Est enim cdb = CDB, et bcd
= BCD (per constr. et §. 125). Simi-
liter cum sit acd = ACD, et adc
= ADC (per constr. et §. 16) erit
dc : ac

dc : ac = DC : AC, adeoque bc : ac = BC : AC (P. 190 Arith.), consequenter cum acb = ACB (ex constr. et P. 167) ac : ab = AC : AB (P. 183) et ob dc : ac = DC : AC ex demon: dc : ab = DC : AB (P. 191 Arith.) Q. e. d.

Aliter.

P. V. P. 80. 1. Electis duabus Stationibus C, et D investigetur quantitas angulorum y, et x, item z, et u (P. 152), quorum summae dant angulos C, et D (P. 86 Arith.)

2. Quaeratur porro distantia Stationum CD (P. 160) et

3. Ducatur in charta linea recta, in quam ex scala Geometrica transferatur recta cd ipsi CD respondens (P. 179).

4. Super ea ope angulorum x, et D construatur triangulum bcd, et ope angulorum z, et C alterum acd (P. 164).

5. San=

5. Tandem in scala geometrica inve-
ſtigetur diſtantia punctorum
a, c & b (F. 279).

Dico eſſe ab:cd = **AB**:**CD**.

Demonſtratio.

Eadem eſt cum proxime praeceden-
te.

Scholion I.

182. Levi attentione patet, non ab-
ſimili methodo ex duabuſ ſtationibuſ
reperiri diſtantiam plurium Locorum.

Scholion II.

183. Nec minuſ manifeſtum eſt, F. V.
menſulae ſitum in iſtiuſmodi operatio- F. 81
nibuſ horizontalem eſſe debere: id
quod obtinetur ope perpendiculi Q.

Problema XXVII.

184. Altitudinem acceſſam **AB**
metiri.

Reſolutio.

1. Baculuſ **DE** tantae longitudinis

sumatur

?:VI. ?: 8?.

rumatur, ut terrae perpendicu:
lariter infixus altitudinem ocu:
li adequet.

2. Humi prostratus baculum ad cal:
cem pedum perpendiculariter ter:
rae infigi curas (?: 121).

3. Quodsi contingat, ut E, et B sint
cum oculo C in eadem recta, erit
C A = A B; sin punctum in=
ferius F cum E, et oculo in eadem
recta fuerit, propius baculo ad
altitudinem A B provolvarisopus
est; sin punctum superius pro=
cul recedendum, donec praedi=
cta conditio adimpleatur.

4. Tandem distantiam oculi C
ab altitudine A B metiari ne=
cesse est (?: 126).

Dico esse C A = A B.

Demonstratio.

Quoniam enim A B (?: 127) et
E D

ED per constr: ad **AC** perpendiculares, inter se parallelae sunt (§:150) adeoque **CD**:**DE** = **CA**:**AB** (§: 168). Sed **CD** = **DE**, per hypo: Ergo **CA** = **AB** (§:149 Arith:) Q. e. d.

Aliter.

1. In distantia plurium e: gr: 30, vel 40, et amplius pedum defigatur (§: 85) perpendiculariter baculus **DE**, et aliquo lince intervallo in **C** alius minor, ita ut cum oculo in **F** constituto **E**, et **B** sint in eadem recta.
2. Investigetur distantia baculorum **GE**, et baculi minoris ab altitudine quaesita **HF**, itemque differentia differentia altitudinum baculorum **GE** (§:120).
3. Quaeratur ad **GF**, **GE**, et **AHF** quarta proportionalis **BH** (§: 301 Arith:)
4. Huic addatur altitudo baculi minoris

novis FC, vel pars AH.

Dico ſummam eſſe altitudinem AB.

E. gr. Sit HF = 48; GF = 20; GE = 16; FC = 5.

20 — 16 — 48 5/192/ 38 $\frac{2}{5}$ = BH
 5   4   4   15   5 = FC
— 192 42 43 $\frac{2}{5}$ = AB
40
2.

Demonſtratio.

Cum HF ipſi AC parallela ſupponatur, ſintque BA (§. 227), et ED ex conſtr: ad AC perpendiculares, erunt eaedem perpendiculares ad HF (§. 230), adeoque GE, et BH parallelae (§. 156), conſequenter GF : GE = HF : HB (§. 208). Q. e. und.

Porro cum HA, et FC ſint perpendiculares inter eaſdem parallelas HF, et AC (ex conſtr: et §. 227), erit FC = HA (§. 216). Quare BH + FC =

BH

BH + HA (P: 88 Arit.) = BA (P: 80 Arit.) Q: e: d:

Aliter.

1. Mensula in D verticaliter eri- P: VI
gatur, ita ut latus ipsius FE sit P: 84.
horyzonti parallelum: idquod ope P: V.
perpendiculi obtinetur. P: 81.
2. Ducatur recta ef lateri mensulae
parallela, et regula cum diopteris
ad hanc applicata vertatur men-
sula, donec collineatio in altitudi-
nem quaesitam fiat.
3. Circa punctum e vertatur regu-
la, donec oculo per dioptras transpi-
cienti apex altitudinis A occurrat,
ducaturque recta eb.
4. Quaeratur distantia stationis
ab altitudine eC (P: 126); et
5. Ex Scala Geometrica minore trans-
feratur ex e in c (P: 29).
6. Ex c erigatur perpendiculum bc
(P: 112),

(P:212), quod

7. Ad scalam Geometricam appli-
catum (P:179) partem altitudi-
nis AC manifestat.

8. Addatur altitudo BC.

Dico, summam esse altitudinem
AB.

Demonstratio.

Quoniam AB perpendicularis ad
BD (P:127), et Ce ipsi BD paralle-
la per constr: erit eadem AB per-
pendicularis ad CE (P:130). Sed
ad eandem etiam bc perpendicu-
laris, per constr: Ergo bc ipsi AC
parallela (P:156), consequenter
ec : cb = EC : CA (P:168).

Aliter

6. Investigetur quantitas anguli
e (P:152), et distantia stationis e
C (P:120).

1. Super ec in Scala Geometrica
minor-

minore assumta (P. 219) conformabitur triangulum adc (rectangulum cbe (P. 264).

3. Reliqua fiant ut ante.

Demonstratio.

Est enim $c = C$, $e = E$ per cons. Ergo $ec : cb = EC : CA$ (P. 201) Q.e.d.

Scholion.

285. In omnibus istis resolutionibus supponitur planities perfecte horizontalis: quae cum rarissime in praxi occurrat, et notabilis fuerit declivitas, non tam instrumenti altitudo, quam ipsa CB addenda, in altitudine accessa facile investiganda. Necesse etiam est, ut baculi, quantum fieri potest, exactissime ad horizontem perpendiculariter infigantur, et in instrumentis praescripta relatione collocandis cura maxima adhibeatur: immo altitudo

BC

BC eodem modo investigari poteſt, quo ipſam AC invenimus.

Problema XXVIII.

T. VI. F. 82. 186. Altitudinem inaccessam AB metiri.

Resolutio.

T. VI. F. 83. Sine instrumentis prolixa est operatio. Nimirum.

1. Distantia Stationis CA, vel FH quaeratur per problema 25 (§. 180).
2. Reliqua sunt ut in problemate praecedente (§. 184).

Aliter.

T. VI. F. 83 n. 1.

1. Statione in D electa mensula collocetur ut in problemate praecedente (§. 184).
2. Ducantur ut ibidem, lectae ef, et af.
3. Baculi in G defixi, ut sibi in lecta fG, quaeratur distantia a puncto

puncto f (P: 106), et

4. Ex scala Geometrica transfera-
tur in fe (P: 119).

5. Sub puncto f in D defigatur ba-
culus, et mensula ita collocetur
in G, ut punctum e ipsi G im-
mineat, et dioptras regulae
ad ef applicatae respicienti ba-
culus in D occurrat.

6. Vertatur regula circa punctu
e, donec dioptras perspiciens
apicem A videat, ducaturque re-
cta ea.

7. Ex puncto a demittatur ac ad
fe perpendicularis (P: 110): quae

8. Ad Scalam Geometricam (P: 119)
applicata prodit altitudinem
AC.

9. Quod si puncta B, E, D fuerint P. V.
in eadem recta, addatur altitudo P. 85
puncti f ut habeatur AB; sin n. 1
minus

minus, regula circa e vertatur donec (per) dioptras despiciens videat B, ducatur e b, (per)pendiculum ac continuetur, donec ipsi e b in b occurrat. Et enim ab in Scalam Geometricam translata mani=festabit AB.

Demonstratio.

In △△ enim fe a, et Fe A est an=gulus a fe = AFC, et a e f = A e F (per) constr: Ergo fe : ea = Fe : e A (P. 165). Porro AC, et ac perpendiculares ad FC (per P. 121, et constr:), adeoque in=ter se parallelae (P. 150). Quare ae : ac = A e : AC (P. 168), consequenter fe : ac = Fe : AC (P. 194 Arith:) Quod erat unum.

Quoniam ab parallela ipsi AB (per) demonstr: erit ae : ab = A e : AB (P. 166), consequenter fe : ab = Fe : AB (per demonstr: et P. 194 Arith:) Quod

erat

erat alterum.

Aliter.

1. Investigetur quantitas anguli A [margin: P: VI. P: 85.]
FC in D, et anguli A e. C in G, itemque C e. B in eadem statione G (P. 152).
2. Quaeratur distantia Fe. (P: 126).
3. Construatur ex his datis juxta Scalam modicam triangulum aef (P: 179).
4. Demittatur ex vertice a in basin continuatam perpendicularis ac (P: 116) indefinite producenda.
5. Fiat angulus ceb ipsi C e B aequalis (P: 208), et producatur crus eb, donec perpendiculari ab in b occurrat (P: 21).

Dico esse fe: ab = Fe: AB.

Demonstratio

Coincidit cum praecedente.

Caput.

Caput IV.

De Circuli Symptomatis.

Theorema LIII.

D. 1. 187. Circuli se intus tangentes
D. 5. sunt eccentrici.

Demonstratio.

Quoniam circulus unus alterum intus tangit, per hypoth. ille totus intra ejus peripheriam continetur (D. 47). Quare si ex centro ejus C ducatur in peripheriam majoris recta CN (P. 111), ea peripheriam minoris in M secabit (P. 50), eritque adeo radius minoris CM pars ipsius CN (P. 9 Arith.). Quodsi jam C ponatur centrum commune circulorum, erit CL = CM, et CL = CN (D. 49) adeoque CM = CN (P. 87 Arithm.) quod cum sit absurdum, per demon. est P.

eſt (P. 84 Ariſ.); circuli idem cen=
trum habere nequeunt. Sunt ergo
eccentrici (P. 44). Q. e. d.

Theorema LIV.

188. Duo circuli ſe mutuo ſe= D. VI
cantes ſunt eccentrici. P. 86

Demonſtratio.

Quoniam circulus X alterum Z
ſecat per Hypot: pars illius intra hunc
cadit (P. 53). Ducatur itaque ex C
centro circuli X radius CB, qui con=
tinuatus ad peripheriam circuli Z
ſecabit peripheriam illius in E
(P. 50), eritque CB pars ipſius C
E (P. 9 Ariſ.). Quodſi C ponatur cen=
trum etiam circuli Z; erit CB =
AC, et CE = AC (P. 40), adeoque C
B = CE (P. 8, Ariſ.). Quod cum ſit
abſurdum (per demon: et P. 84 Ariſ.)
circuli X, et Z idem centrum habere ne=
queunt. Sunt ergo eccentrici (P. 44) Q. e. d.

Theorema

Theorema LV.

VI 289. In eodem, vel in aequalibuſ
87. circuliſ chordae aequaleſ AB, et D
E aequaleſ arcuſ ſubtendunt: et contra.

Demonſtratio.

Quoniam AB = DE (hypo.) BC = CE et AC = CD (§. 40.), anguluſ ACB = DCE (§. 204.), conſequenter arcuſ AB, et DE, menſurae angulorum ACB, et DCE (§. 51.), aequaleſ ſunt (§. 142.). Quod erat primum.

Arcuſ AB, et DE aequaleſ ſunt per hypoth. Sunt vero etiam iidem menſurae angulorum ACB, et DCE (§. 51.): anguli igitur iſti aequaleſ ſunt (§. 142.). Quoniam porro BC = CE, et AC = CD (§. 40.); erit quoque AB = DE (§. 179.). Quod erat alterum.

Theorema LVI.

290. Si in circuliſ inaequalibuſ

arcuſ

arcus AB, et ab fuerint similes, T. VI chordae cognomines ad suos radios T: 8, AC, et ac eandem rationem habent.

Demonstratio.

Quoniam arcus AB, et ab similes sunt, per hypo: iidemque mensurae angulorum ACB et acb (P. 37), erit ACB = acb (P. 142). Est vero AC : BC = ac : bc (P. 40 Geom; et P. 149 Arith.) Ergo AB : BC : ab : bc (P. 183). Q. e. d.

Theorema LVII.

egr. Radius CE, chordam BA T. VI bifariam secans in D, etiam arcum T: 85 bifariam secat in E, et ad chordam BA perpendicularis; et contra.

Demonstratio.

AD = DB, per hypot. AC = CB (P. 40), et DC = DC. Ergo o = x, et y = u (P. 204), consequenter CE ad AB perpendicularis in D (P. 79)

(P: 79), et arcus AE, atque EB, ae-
qualium angulorum u, et y mensu-
rae (P: 51) aequales sunt (P: 142).
Quod erat primum.

Sunt arcus AE, et EB aequa-
les ex Hypo: cum iidem sint mensu-
rae angulorum u, et y (P: 51); erit y
= u (P: 142). Est vero etiam AC =
= CB (P: 40), et DC = DC. Ergo A
D = DB, o = x (P: 179), consequen-
ter CD ad AB perpendicularis
(P: 79). Quod erat secundum.

Sit denique radius CE perpen-
dicularis ad chordam AB in D ex
Hypo: erit o = x (P: 79). Est vero
etiam AC = CB (P: 40), et hinc m =
= n (P: 184), consequenter y = u (P:
(240). Quare arcus AE, et EB, ae-
qualium angulorum u, et y mensu-
rae (P: 51), aequales sunt (P: 142), et A
D = DB (P: 251). Quod erat tertium.

Theorema

Theorema LVIII.

Hyp. Si recta NE chordam AB T: VI
bifariam secet, et ad eam perpendi- T: 88.
cularis fuerit, per centrum transit, et tam arcum AEB, quam ANB bifariam secat.

Demonstratio.

Quoniam ND perpendicularis ad AB, per Hypot: erit o = x (T: 79). Est vero etiam AD = DB per Hypot:, et ND = ND. Ergo AN = NB (T: 119), consequenter arcus cognomines aequales sunt (T: 289). Eodem modo ostenditur, arcus AE, et EB aequales esse. Quod erat unum.

Arcus AN = NB, et AE = EB, per demon: Ergo NA + AE = NB + BE (T: 88 Arit:), consequenter NE diameter circuli (T: 135), adeoque per centrum transit (T: 39). Quod erat alterum.

Problema

Problema XXIX.

293. Datum arcum AB in duas partes aequales dividere.

Resolutio, et Demonstratio.

Ducatur ad punctum medium D chordae AB perpendicularis NE
VI. (P. 110), haec arcum AB bifariam
P. 88. secabit (P. 291). Q. e. f., et d.

Problema XXX.

294. Per data tria puncta non in directum jacentia A, B, et C circulum describere.

VI. ### Resolutio.

P. 89. 1. Ex A, et C fiant intersectiones in D, et E, itemque aliae duae G, et H ex C, et B.

2. Ducantur rectae DE, et HG (P. 121). Dico esse I centrum circuli per A, C, et B describendi (P. 131).

Demonstratio

Puncta A, C, et B sunt in peri=

pheria

pheriam alicujus circuli, per hypo: at:
que adeo rectae AC, et CB chordae
(P: 38) sed ED ad AC, GH ad BC
perpendicularis, et ED ipſam A
C, GH vero BC bifariam ſecat (P: 119).
Ergo utraque per centrum tranſit (P:
191). Quare cum DE, et GH tantum
in I ſe mutuo ſecent (P: 150): erit I cen
trum circuli per puncta data A, C, et
B tranſeuntis. Q. e. d.

Corollarium I.

195. Aſſumtis in peripheria, vel
arcu circuli tribus punctis, centrum
inveniri datusque arcus perfici po
teſt.

Corollarium II.

196. Si tria puncta unius periphe:
riae tribus punctis alterius congruant,
peripheriae totae congruunt, atque
adeo circuli aequales ſunt (Para:
grapho 161).

Corollarium

Corollarium III.

197. Omne triangulum est circulo inscriptibile (§. 116).

Theorema LIX.

VI. 198. In eodem, vel aequalibus circulis chordae aequales AB et DE
§. 87. a centro C aequaliter distant; et contra.

Demonstratio.

Quoniam FC, et CG sunt distantiae chordarum AB, et DE a centro C, per Hypo: erunt ad chordas perpendiculares (§. 125): et hinc et ex lectis (§. 15), adeoque aequales (§. 145). Porro cum AB = DE per Hypoth: et CF ad AB perpendicularis per demonstratam, ipsam AB, CG vero perpendicularis ad DE, per demonstrata, ipsam DE bisecet (§. 191); erit FA = DG (§. 17. Arith.). Quare cum etiam sit AC = CD (§. 40)

(§. 40); erit CF = CG (§. 135). Quod erat unum.

Quodsi distantiae FC, et CG fuerint aequales, per Hypoth: cum sit o = x per demonstr; et AC = CD (§. 40); erit AF = DG (§. 135). Sed AF = ½ AB, et DG = ½ DE (§. 291). Ergo AB = DE (§. 111 Arith.) Quod erat alterum.

Theorema LX.

299. Chordarum maxima est diameter AB. T. I. F. ...

Demonstratio.

Est enim CO = BC, et CN = = CA (§. 40). Sed CO + CN > ON (§. 190). Ergo BC + CA, hoc est, BA > ON (§. 89 Arith.) Q. e. d.

Theorema LXI.

300. Si intra triangulum ACB, su- T. VII. F. 90.
pra ejusdem basi AB constituatur triangulum ADB; erunt crura

inter

interius AD, et DB simul sumta minora ambientibus exterioris AC, et CB simul sumtis; angulus vero ad verticem interioris D major angulo ad verticem exterioris C.

Demonstratio

Quia $AE < AC + CE$ (§. 190), $AE + EB < AC + CE + EB$ (§. 90 Arith.), hoc est, $AD + DE + EB < AC + CB$ (§. 86. 89 Arith.). Sed $DB < DE + EB$ (§. 190). Ergo multo magis $AD + DB < AC + CB$. Quod erat unum.

Quoniam $o > x$, et $u > m$ (§. 188), erit $o + u > x + m$ (§. 90 Arith.). Quod erat alterum.

Theorema LXII.

VII. F. 91. 301. Chorda arcus majoris AB major est, chorda minoris AD minor.

Demonstratio

$EB + EC > BC$ (§. 190), hoc est, quia $DE + EC = BC$ (§. 40), $EB + EC > AD$

$\triangleright$ DE + EC (P. 89 Arith.) consequenter EB $\triangleright$ DE (P. 92 Arith.). Est vero AE + DE $\triangleright$ DA (P. 190). Ergo multo magis AE + EB $\triangleright$ DA, hoc est AB $\triangleright$ DA (P. 86. 89 Arith.). Q. e. d.

Theorema LXIII.

302. Secantium MA, MN, ME ex eodem puncto M ductarum maxima est MA, quae per centrum transit; reliquae sunt tanto minores, quo a centro remotiores. Contra earundem portiones extra circulum MD, et MO, MB sunt tanto majores, quo magis a centro distant. minima est MB secantis MA per centrum transeuntis.

Demonstratio.

1. NC + MC $\triangleright$ MN (P. 190). Sed NC = CA (P. 40). Ergo CA + CM = NC + MC (P. 88 Arith.) = MA (P. 86 Arith.) $\triangleright$ MN (P. 89 Arith.). Quod

erat

erat ~~unum~~ primum.

2. MO + EO > ME (§. 190). Sed ON > EO (§. 186). Ergo multo magis MO + ON, hoc est, MN (§. 80 Arith.) > ME. Quod erat secundum.

3. CO + OM > MC (§. 190). Sed CO = CB (§. 40). Ergo OM > MB (§. 90 Arith.). Quod erat tertium.

4. CD + OM > CO + OM (§. 300). Sed CD = CO (§. 40). Ergo DM > OM (§. 90 Arith.). Quod erat quartum.

Theorema LXIV.

P. VII. 303. Si ex puncto E intra circu-
F. 91. lum assumto ducantur in peripheriam rectae EF, EB, EG & item EA, ED, EH & maxima earum EF, quae per centrum C transit, reliquae EB, EG & tanto majores, quo maximae propiores. Contra minima est EA, quae continuata per centrum transit: reliquae ED, EH & sunt

tanto

tantò majores, quò ab ea remotiores.

Demonstratio.

1. EC + BC > EB (P. 190). ~~Sed~~ Sed BC = FC (P. 40). Ergo EC + BC = EC + FC (P. 88 Arith.), hoc est, EF (P. 86 Arith.) > EB (P. 89 Arith.) Q. e. primum.

2. EI + GI > GE et IB + IC > BC (P. 190), hoc est, ob BC = GI + IC (P. 40), IB + IC > GI + IC (P. 89 Arith.), adeoque IB > GI (P. 92 Arith.). Quare EI + IB > EI + GI (P. 90 Arith.), adeoque EI + IB, hoc est EB (P. 86 Arith.) > GE. Quod erat secundum.

3. EC + ED > DC (P. 190). Sed CD = EC + EA (P. 40). Ergo EC + ED > EC + EA (P. 89 Arith.), consequenter ED > EA (P. 92 Arith.) Q. e. tertium.

4. EK + KD > ED et KH + KC > CH (P. 190), hoc est, ob CH = CK + KD (P. 40), KH + HC > KC + KD (P. 92 Arith.), adeoque KH > + KD

(P. hanc

(P. 92 Arit.) Quare EK + KH > EK + KD (P. 90 Arit.), adeoque EK + KH, hoc est, EH (P. 86 Arit.) > ED. Quod erat quartum.

Theorema LXV.

304. Recta IL radio CL perpendiculariter insistens tangit circulum in unico puncto L: nec inter tangentem HL, et circulum alia recta duci potest.

Demonstratio.

D. 1. Ducatur enim quaelibet alia
P. 3. CK (P. 111). Quoniam IL perpendicularis ad CL (Hypoth.), adeoque L est rectus (P. 75); K erit acutus (P. 218). Ergo CK > CL (P. 220), consequenter quodlibet punctum K a L diversum, hoc est tota linea LI seu HI extra circulum cadit (D. 40), et ideo circulum tangit in unico puncto L (D. 41). Quod erat unum.

Ducatur

 Ducatur deinde ſi fieri poteſt, inter tangentem HL, et circulum recta ML. Demittatur in eam ex centro C perpendicularis CD (P. 216) erit D rectus (P. 18) adeoque CL > CD (P. 220). Cadit itaque D intra circulum (P. 40), quod cum hypotheſi repugnet (P. 47), inter tangentem, et circulum per contactum tranſiens recta alia duci nequit. Q. e. alterum.

Corollarium I.

305. Angulus igitur contactus, tangente HL, et arcu ML interceptus, eſt quovis rectilineo minor: angulus vero ſemicirculi, inter radium CL, et arcum ML interceptus, eſt quovis rectilineo acuto major.

Scholion.

306. Hoc paradoxum Euclidis exercuit Mathematicorum ingenia. Agitata eſt de eo controverſia inter Jaco-

Jacobum Peletarium Cenomani in Gallia Matheseos Professorem, et Christophorum Clavium Jesuitam Babergensem: quorum prior angulum contactus rectilineo heterogeneum (P: 30 c huj:) agnovit, quemadmodum linea est superficiei heterogenea: ille vero e numero angulorum sustulit, et pro non quanto declaravit. Peculiarem de angulo contactus, et semicirculi tractatum A. 1656, conscripsit Wallisius, qui legitur operum Vol: II. f: 605, et seq: ubi, cum Peletario, angulum contactus omni assignabili minorem, adeoque nullius magnitudinis esse defendit.

Corollarium II.

307.

(a) In Schol: ad 16 Elem: III. f: 117, et seq: Tom: I. Oper:

Corollarium II.

307. Circulum in eodem puncto L non niſi unica recta HI tangere poteſt.

Theorema LXVI.

308. Omnis recta HI circulum tangens radio CL ad punctum contactus ducto perpendicularis eſt.

Demonſtratio.

Ponamus LL non eſſe ipſi CL perpendicularem. Ergo ex C duci poterit KC ad HI perpendicularis (§. 210.) haecque utpote tangens ſecundum hypo: extra circulum cadet (§. 47.) conſequenter CK > CN (§. 84. Arith:) > CL (§. 40 Geom:, et §. 89 Arith:). Eſt vero etiam CK < CL (§. 220): quod cum ſit abſurdum, tangens IL radio CL ad contactum perpendicularis. Q. e. d.

T: I. F: 3

Corollarium I.

309. Tangens IL efficit cum radio.

dio CL in puncto contactus rectum (P. 48).

Corollarium II.

310. Si HI circulum tangat, et ex centro C ad eam perpendicularis CL demittatur (P. 210), punctum contactus L determinatur.

Problema XXXI.

T. I. 311. Ducere rectam HI circulum
F. 3. in dato puncto L tangentem.

Resolutio, et Demonstratio.

1. Ex centro circuli C ad punctum contactus L ducatur radius CL.
2. In L excitetur perpendicularis LH (P. 249), quae circulum in L tangit (P. 308). Q. e. f., et d.

Theorema LXVII.

T. VII. 312. Arcus FG, et HI inter chordas
F. 91. parallelas intercepti sunt aequales.

Demonstratio.

Demittatur CK ex centro C perpen:

perpendicularis ad FH (§. 215): erit eadem perpendicularis ad GI (§. 230), ob FH, et GI ex hypoth. parallelas; divideturque adeo tam arcum FKH, quam GHI bifariam in K (§. 191). Quare KF — KG = KH — KI, hoc est, FG = HI (§. 92 Arit.). Q. e. d.

Theorema LXVIII.

313. Angulus ad centrum ACD est duplus anguli ad peripheriam ABD, eidem arcui AD insistentis. (Fig. 13.)

Demonstratio.

I. Ducatur EF per centrum C ipsi BD parallela (§. 258), erit EB = DF (§. 312), adeoque o = x (§. 142). Sed o = y (§. 156). Ergo x = y (§. 8. Arit.) = $\frac{1}{2}$ ACD. Porro o = u (§. 233). Ergo u = y = $\frac{1}{2}$ ACD (§. 8. Arit.). Quod erat primum.

II. In casu altero o = 2y, et u = 2

x, &c.

T. VII. x tts caſ. 1. Ergo $u + o = 2x + 2y$ (§.
F. 93. 88 Arith.) hoc eſt, $ABD = \frac{1}{2} ACD$
(§. 94 Arith.) Quod erat ſecundum.

T. VII. III. In caſu tertio $o + u = 2y + 2x$ (§
F. 94. caſ. 2., et $o = 2y$ (§ caſ. 1. Ergo $u = 2x$
(§. 91 Arith.), hoc eſt, $\frac{1}{2} ACD = ABD$
(§. 94 Arith.) Quod erat tertium.

Theorema LXIX

T. I. 314. Anguli ad peripheriam ABD
F. 13. menſura eſt arcus dimidius AD cui inſiſtit.

Demonſtratio.

I. Sit ABD angulus in majore ſegmento: inſiſtet ergo arcui minori AD quam ſemicirculo (§. 10. 50), adeoque ipſi reſpondet angulus ad centrum ACD (§. 12. 135). Sed anguli ACD menſura eſt arcus AD (§. 13). Ergo ipſius ABD menſura dimidius arcus AD (§. 313. 142). Quod erat unum.

Tab. II. Sit ACB angulus in ſemicirculo.
VII. Ducatur utcunque recta CD: erit
F. 95.

arcus

arcus dimidius AD menſura anguli ACD, et $\frac{1}{2}$ DB menſura ipſius DCB §. caſ:1. Ergo $\frac{1}{2}$ ADB menſura anguli ACB. Quod erat ſecundum.

III. Sit denique HIK angulus in minore ſegmento. Ducatur utcunque recta IL: erit ut ante $\frac{1}{2}$ HL menſura anguli HIL, et $\frac{1}{2}$ LK menſura anguli LIK §. caſ:1. Ergo denuo $\frac{1}{2}$ HLK menſura anguli HIK. Quod erat tertium.

Corollarium I.

315. Duo, vel plures anguli HLI, et HMI eidem arcui HI, vel aequalibus arcubus inſiſtentes aequales ſunt (§. 142). §. I §. 14

Corollarium II.

316. Quare cum porro ſit o = x + u (§. 239); erit anguli extra centrum menſura dimidium arcuum HI, et LM, quibus ipſe, et ejus verticalis K inſiſtunt (§. 314). §. I. §. 14.

Corolla-

Corollarium III

T. VII. F. 95. 317. Cum angulus in semicirculo ACB semicirculo insistat per Hypoth. mensura ejus est circuli quadrans (§. 314), adeoque ipse rectus est (§. 143).

Corollarium IV.

T. VII. F. 96. 318. Cum angulus in majore segmento DIF arcui minori DF, quam est semicirculus, insistat (§. 70); mensura ejus est semiquadrante minor (§. 314), adeoque ipse recto minor (§. 143), consequenter acutus (§. 66).

Corollarium V.

T. VII. F. 96. 319. Non absimili ratione liquet angulum in minore segmento HIK esse obtusum.

Corollarium VI.

T. VII. F. 97. 320. Quoniam o = x + y (§. 239), et anguli o mensura est $\frac{1}{2}$ LM, anguli y vero $\frac{1}{2}$ NO (§. 314), anguli extra peripheriam G mensura est differentia inter dimidium arcum concavum LM, cui insistit, et dimidium convexum NO inter crura interceptum.

Problema.

Problema XXXII.

321. Normam examinare utrum exacta recta sit nec ne.

Resolutio.

1. Describatur intervallo arbitrario semicirculus AEF, et T. VII F. 98.
2. Ducantur lineae ex diametri utroque extremo A, et F ad punctum E in peripheria arbitrario assumtum rectae AE et FE
3. Cruribus anguli AEF ita norma applicetur, ut ejus vertex super E cadat. Hoc enim si fieri potest, erit norma exacta.

Demonstratio.

Quum enim normae angulus LEM aequalis est angulo AEF (§. 169), adeoque rectus (§. 317), consequenter norma exacta (§. 212). Q. e. d.

Theorema LXX.

322. Mensura anguli minoris segmenti ATB est dimidium arcus T. VII F. 99. TDB, anguli vero majoris segmenti BTH dimi

dimidium arcus majoris **BGT**.

Demonstratio.

Ducatur ex puncto contactus **T** diameter **TE**; erit **ATE** rectus (P:308) sumadeo ejus mensura sit arcus dimidius **EBT** (P:135. 143), anguli vero **BTE** dimidius arcus **EB** (P:314); erit anguli **ATB** mensura dimidius arcus **BDT**. Q.e. unum.

Eodem modo patet, cum dimidius semicirculus **EGT** sit mensura anguli **ETH** (P:135. 143), et dimidius arcus **EB** mensura anguli **BTE** (P:314), esse dimidium arcum **BGT** mensuram anguli **BTH**. Q.e. alt.

Corollarium I.

323. Cum anguli **G** mensura etiam sit dimidius arcus **BDT**, ipsius **D** vero arcus arcus dimidius **BGT** (P:314), angulus in majore segmento **G** aequalis est angulo minoris segmenti **ATB**, et angulus in in minore segmento **D** aequalis est angulo majoris segmenti **BTH** (P:142).

Corollarium

Corollarium II.

324. Si chorda GT ultra circulum continuetur in F; erit anguli BTF mensura semisumma arcuum TB et TG a chordis cognominibus subtensorum. Nam ATF = GTH (§. 156). ergo ejus mensura dimidius arcus TG (§. 322). Est vero anguli ATB mensura arcus dimidius TB (§. cit.). Quare semisumma eorundem arcuum est mensura anguli BTF.

Corollarium III.

325. Si LM et MN sint tangentes ex eodem puncto ductae; erit angulorum MLN et MNL mensura arcus dimidius LN (§. 322), consequenter anguli ipsi sunt aequales (§. 142), et ideo LM = MN (§. 153). T. VII. F. 200

Corollarium IV.

326. Quia angulorum L, M, et N mensura est semicirculus (§. 140. 243), angulorum vero N et L junctim sumtorum arcus LN (§. 322); erit anguli M a duabus tangentibus.

tibus LM, et NM intercepti mensura dif-
ferentia arcus intercepti LN a semicirculo.

Problema XXXIII.

?VII. 367. Inter duas lineas AB, et BE me-
?:101. diam proportionalem BD invenire.

Resolutio.

1. Jungantur lineae datae AB et BE in directum, dividaturque AB bi-fariam in C (§. 210).
2. Ex C intervallo ipsius AC describatur semicirculus ADE (§. 136).
3. Ex B erigatur perpendicularis BD (§. 217).

Dico esse AB : BD = BD : DE.

Demonstratio.

Quoniam BD perpendicularis ad AE, consm, et n sunt anguli recti (§. 78). Sed o + x est ibidem rectus (§. 317), et utrique triangulo ABD et ADE commu-nis. Ergo o = z (§. 246), consequenter y = x (§. cit.) et tunc AB : BD = BD : BE (§. 267). Q. e. d.

Corollarium

Corollarium I.

328. Cum sit **AB : BD = BD : BE**; ex data sagitta **AB** et dimidia chorda **BD** invenitur diameter (P. 302 Arith.) sit e.g. **AB** = 80‴, **BD** = 300‴, erit **BE** = 1125‴, adeoque **AB + BE = AE** 1205 seu fere 12′.

Corollarium II.

329. Ex demonstratione una liquet Δ rectangulum **ADE** per lineam perpendicularem **DB** ex angulo recto **D** in hypothenusam **AE** demissam resolvi in duo triangula **ABD**, et **BDE** inter se et toti **ADE** similia (P. 205).

Corollarium III.

330. Cum adeo etiam sit **AB : AD = AD : AE** (P. cit.); si lineae fuerint majores, una datarum ex **A** in **B**, altera ex **A** in **E** transfertur, factisque reliquis, ubi in resolutione problematis, erit **AD** media proportionalis quaesita.

Corollarium IV.

331. Si ergo **AB** sit unitas, erit **BD** radix ipsius **BE**, aut **AD** ipsius **AE** (P. 142 Arithmeticae.)

Theorema

Theorema LXXI.

F: I. 332. Si duae chordae HM et LI se
F: 24. mutuo secent in K; erit HK : LK = K
I : KM.

Demonstratio

Quoniam enim x = x, et u = u (P. 315): ideo HK : LK = KI : KM (P. 265). Q. e. d.

Theorema LXXII.

F: VII. 333. Si fuerint duae secantes GL,
F: 97. et GM ex eodem puncto D ductae: erit GM : GL = GN : GO.

Demonstratio.

Angulus x est utrique triangulo GNO, et GLM communis. Anguli GNO mensura est semisumma arcuum NL, et NO (P. 314). Sed anguli GML mensura est semisumma eorundem arcuum (P. 314). Quare GNO = GML (P. 144), consequenter GM : GL = GN : GO (P. 265). Q. e. d.

Theorema

Theorema LXXIII.

334. Si ex eodem puncto A ducuntur Tab. duae rectae AD, et AB, quarum altera VII circulum tangit, altera secat; erit tan- F. 10. gens AD media proportionalis inter to- tam secantem AB, et ejus portionem extra circulum AC.

Demonstratio.

Angulus A est utrique triangulo A CD, et ABD communis. Angu- li ADC, et ABD aequa- les sunt (§. 313.) Er- go AC : AD = = AD : AB. (§. 264.) Quod erat De- monstrandum.

Caput V.

De Figurarum descriptione

Theorema LXXIV.

Tab: VII. Fig: 103. 335 = In Parallelogrammis Latera oppoſita ſunt æqualia; et ſi in figura quadrilatera Latera oppoſita fuerint æqualia, erunt eadem parallelogramma.

Demonſtratio.

Quoniam OPQN parallelogrammum ex Hypoth: erit OP ipſi NQ, et ON parallela ipſi PQ (P: 104), conſequenter ducta diagonali PN erit x = o, et n = m (P: 331), adeoque OP = NQ, et ON = PQ (P: 151). Quod erat unum.

Quod ſi OP = NQ, et ON = PQ ex Hypoth: cum etiam ſit NP = NP, erit x = o, et n = m (P: 204). Quod erat alterum.

Corollarium.

Tab: VII. Fig: 103 336 = Cum in Quadrato, Oblongo, Rhom=

Rhombum, et Rhomboide Latera op-
posita aequalia sint (§. 98. 99. 100. 101);
erunt Quadratum, Oblongum, Rhom-
bus, et Rhomboides parallelogram-
ma (§. 335).

Theorema LXXV.

337. Diagonalis dividit parallelo- Tab. VII. F. 103
gramma in duas partes aequales, an-
guli in iis diagonali oppositi sunt
aequales, anguli vero ad idem Latus
oppositi duobus rectis aequantur, et
duo Latera simul sumta sunt diago-
nali majora.

Demonstratio.

In Parallelogrammis ON=PQ, et
PO=QN (§. 335). Sed PN=PN. Ergo △
NOP=△NQP (§. 104). Quod erat unum.

Quoniam in parallelogrammis OP
ipsi NQ, et ON ipsi PQ parallela (§.
103): anguli O, et N, N et Q, Q et P, P et
O simul sumti aequantur duobus re-

ctis

ctis (§. 233). Quod erat secundum.

Quoniam anguli O + N = N + Q est demonstratum; erit O = Q (§. 92 etiam). Similiter quoniam Q + P = Q + N, est demonstratum; erit P = N (§. 92 etiam). Quod erat tertium.

Denique NO + PO > NP, et PQ + QN > PN (§. 190). Quod erat quartum.

Problema XXXIV.

§. VII. 335. □ Super data recta CD quadra-
F. 104. tum construere.

Resolutio

1. In C erigatur perpendicularis AC (§. 249) = CD.

2. Ex D et A intervallo ipsius CD fiat intersectio in B (§. 97).

3. Ducantur AB et DB.

Demonstratio

AC = CD = AB = BD, per constr. Ducta ergo diagonali AD, patet esse

C =

C = B (§. 104). Sed C rectus est (Constru: Ergo B etiam rectus (§. 145), consequenter o et x, item y et m semirecti (§. 147), ideoque c + y, et x + m itidem recti. Quare figura est Quadratum (§. 98). Q. e. d.

Aliter.

1. In C et D erigantur perpendiculares CA et DB ipsi CD aequales (§. 149).
2. Ducatur recta AB.

Demonstratio

Est enim CA = DB = CD, per const. et quoniam AC et BD perpendiculares ad CD per constru: anguli ad D et C sunt recti (§. 98) adeoque BA parallela ipsi DC (§. 126), consequenter anguli A et B sunt recti (§. 133) et ob parallelas AC, et BD (§. 156) AB = CD (§. 155). Est igitur ABCD Quadratum (§. 98). Q. e. d.

Problema XXXV.

339. Datis duobus rectis MI et IK rectan:

VII. Rectangulum parallelogrammum seu
105 oblongum construere.

Resolutio.

1. Jungantur MI, et IK ad angulos rectos (§. 149).

2. Ex M intervallo ML = IK describatur Arcus, et ex K intervallo KL = IM alius priorem intersecans in L (§. 19).

3. Ducantur rectae ML et KL.

Demonstratio.

MI = KL et ML = IK, per constr: Est ergo MIKL parallelogrammum (§. 325), consequenter I = L, et L + M ac I + K = aequalis duobus rectis (§. 337). Sed I est rectus, per con: Ergo et L (§. 145), ideoque M et K recti sunt. Est ergo figura constructa oblongum (§. 104). Q. e. d.

Problema XXXVI.

340. Data recta GH una cum angulo

angulo obliquo G Rombum conſtruere. D: VII.

Reſolutio D: 106.

1. Ad datam rectam GH conſtituatur in G angulus dato aequalis (§. 208).

2. Fiat GE = GH, et reliqua peragantur, ut probl: 34 (§. 338).

Demonſtratio

1 EG = EF = FH = HG, per con: Ergo EFHG parallelogrammum (§. 335), conſequenter G + F, et G + H, ac G + E = duobus rectis (§. 337). Sed G eſt angulus obliquus ex hypotheſi: Ergo et F conſequenter etiam EH ſunt obliqui. Ideoque figura conſtructa Rombus eſt (§. 99).

Q. e. d.

Problema XXXVII. D: VII

341 = Datis duobus rectis ON, et OP D: 103 una cum angulo intercipiendo O Romboidem conſtruere.

Reſolutio.

1. Jungantur rectae ON, et OP ſub angulo

gulo dabo (§:208).

2. Reliqua peragantur, ut in probl: 35 (§:339).

Demonstratio

Eadem est, quae probl: praecedentis.

Theorema LXXVI.

D:VIII. Th:107 340. Si peripheria circuli dividatur in partes quotcunque aequales ducanturque subtensae AB, BC, CD etc. figura circulo inscripta regularis est.

Demonstratio.

Cum enim arcus AB, BC, CD etc. sint aequales, per hip: etiam chordae cognomines aequales sunt (§:269). cumque anguli A, B, C etc. aequalibus arcubus BCDE, CDEA, DEAB etc. insistant, ipsi quoque aequales sunt (§:315). Figura igitur circulo inscripta regularis est (§:206). Q. e. d.

Problema XXXVIII.

343. Invenire summam omnium angulorum

rum in quocunque poligono.

Resolutio.

1. Multiplicentur 180° p numerum laterum.

2. A producto subtrahantur 360°. Residuum est summa quaesita

E. gr: Pentag: 180. | Hexag: 180.

5	6
900	1080
360	360
540	720

Demonstratio.

Quaelibet figura ex assumto in ea p. VIII puncto F in tot triangula AFB, BFC, p. 108 CFD &c resolvitur, quot habet latera AB, BC, CD &c. Si ergo 180° p numerum laterum multiplices, prodit summa omnium angulorum in dictis triangulis (p. 140) sed anguli circa punctum F, qui non pertinent ad angulos polygoni, semper efficiunt 360 (p. 159) Quodsi ergo a facto supra invento subtrahantur

tur 360°, summa angulorum polygoni relinquitur: Q: e: d:

Aliter.

D.VIII. Cum numerus triangulorum ABC,
P.III. CAD, et DAE, in quae resolvitur figura polygona, si diagonales AC, et AD ex puncto A ductas, a numero laterum AB, BC, CD, DE, EA constanter binario differat; si 180° multiplicentur per numerum laterum binario multatum, prodit summa omnium angulorum A, B, C, D, et E (P.140). Q: e: i: et d.

E: gr: pro Pentag: 180 } pro Hexag: 180

180	180
3	4
540	720

Corollarium I.

344. Quod si summa inventa per numerum laterum dividatur; quotus est angulus polygoni regularis (P.106).

Scholion.

345. En tibi tabulam, in qua summa angulorum

angulorum in figuris rectilineis quibuscunque, et quantitas unius in regularibus a trigono usque ad dodecagonum exhibetur (F. 343). Construitur columna secunda continua additione 180, tertia vero numeris in columna primerum angulorum, sive laterum divisis (F. 344). Utimur hac tabula tum in figuribus regularibus describendis; tum in angulorum quantitate examinanda, utrum scilicet instrumento rite examinata fuerit, nec ne. Aberratum enim esse intelligimus, ubi eorum summa minor, vel major deprehenditur ea, quae in tabula definit, e.gr: si in heptagono superet 900.

Num: Laterum	Summa Angulorum	Ang: Fig: regularis	Num: Laterum	Summa Angulorum	Ang: Fig: regularis
III	180	60	VIII	1080	135
IV	360	90	IX	1260	140
V	540	108	X	1440	144
VI	720	120	XI	1620	$147\frac{3}{11}$
VII	900	$128\frac{4}{7}$	XII	1800	150

Corol.

Corollarium II.

T. VIII. F. 108 346. = Si latera figurae polygonae cujuscunque continuentur, anguli externi 1, 2, 3, 4 & cum angulis figurae internis efficiunt bis tot rectos, quot sunt latera (§. 147). Sed interni soli efficiunt bis tot rectos quot sunt latera, demtis quatuor (§. 343). Ergo externi in omni casu conficiunt 4 rectos seu 360°.

Problema XXXIX.

T. VIII. F. 107. 347. Dato Poligono regulari cuicunque ABCDE circulum circumscribere.

Resolutio

1. Duo ejus anguli E et D dividantur bifariam rectis EF, et DF (§. 109) ob angulos FED, et FDE duobus rectis minores concursuris in F (§. 162).
2. Ex puncto concursus F describatur radio EF circulus (§. 131).

Demonstratio.

Quoniam

Quoniam o et u sunt angulorum po-
ligoni dimidii per con: erit o = u (§. 106 Geom:
et §. 94 Arith:) consequenter EF = FD (§.
183). Circulus adeo transiens per E tran-
sit etiam per D (§. 40). Ducatur jam ex
F in A recta FA (§. 111). Quoniam o = x
per const: ED = EA (§. 106), et EF = EF,
erit AF = FD (§. 179). Ergo Circulus tran-
siens per D et E, transit etiam per A (§.
40). Porro quia AF = EF, per dem: erit
m = x (§. 184). Sed x dimidius anguli
polygoni, per constr: Ergo et m (§. 87 Arith),
consequenter etiam y. Quare si duca-
tur FB (§. 111), erit utraque FB = FE,
adeoque radius circuli. Eodem mo-
do ostenditur FC, et quae plures fue-
rint rectae ejusmodi, esse radios
circuli, adeoque circulum transire
per omnes angulos polygoni, hoc est, ei-
dem circumscribi (§. 115). Quod erat
demonstrandum.

Corolla-

Corollarium.

348. = Omnis ergo figura regularis eſt circulo inſcriptibilis (§. 116).

Problema XL.

349. = Invenire angulum in dato polygono regulari.

Reſolutio, et Demonſtratio.

Concipiatur polygonum regulare ABCDE circulo inſcriptum (§. 348). Quoniam arcus dimidius BCDE eſt menſura anguli quaeſiti A (§. 314); arcus vero AB, qui ipſius EAB dimidius, habetur, circuli peripheriam per numerum laterum dividendo (§. 189). angulus polygoni A relinquitur, ſi arcum AB a ſemicirculo ſubtraxeris. Q. e. i. et d.

E. gr. Quaeratur angulus pentagoni. Dividatur 360 per 5, quotus 72 eſt arcus AB, qui ex 180 ſubductus relinquit 108 angulum pentagoni quaeſitum. Neve-

Theorema LXXVII.

350. = Quadrilateri Circulo inscripti T:VIII. GHIK anguli bini oppositi H et K, item F:109. G et I conficiunt duos rectos.

Demonstratio.

Insistunt enim junctim sumti integro circulo, e.gr: K arcui GHI, et I complemento ejus ad circulum GKI (§:56), adeoque ipsorum mensura est semicirculus (§:314). Sunt ergo duobus rectis aequales. (§:143.) Q: e.d.

Problema XLI.

351. = Circulo quadratum circum: T:VIII. scribere. Fig:*

Resolutio.

1. Ducantur diametri AB, et DE, se mutuo in centro C, ad angulos rectos secantes (§:210).
2. Ex A, E, B, D, intervallo radii, fiant intersectiones in F, G, H, I.
3. Ducantur rectae FG, GH, IH, et IF,

Eritque

Erit FGHI quadratum circulo circum=
scriptum. Demonstratio.

Anguli ad A, E, B, D sunt recti (P.
338) adeoque FG, GH, HI, et IF circu=
lum tangunt (P. 304). Sunt vero an=
guli G, F, I, H recti (P. 338) et FG =
GH = HI = FI = AC (constr:) Ergo
FGIH est quadratum (P. 97) idque
circulo circumscriptum (P. 11) Q. e. d.

Problema XLII.

P. VIII. 351. — Super data recta ED poly=
F. 107. gonum regulare quodcunque descri=
bere.

Resolutio.

1. Quaeratur angulus polygoni (P.
344. 349)
2. Fiat in E ipsi aequalis (P. 155) et
EA = ED. D
3. Per puncta A, E, D describatur
circuli peripheria (P. 294)

4. In

4. In ea applicetur chorda recta **ED**, quoties fieri potest.

Ita describetur figura quaesita (§. 347. 348.)

Aliter

1. In **E** et **D** fiant anguli dimidio angulo polygoni sigillatim aequales (§. 155) quorum crura **EF** et **DF** se mutuo secabunt in **F** (§. 161).
2. Ex **F** tanquam centro, radio **EF**, describatur circulus, qui erit circulus polygono circumscriptus (§. 347).

Problema XLIII

353. = Circulo dato polygonum regulare quodcunque inscribere.

Resolutio.

1. Dividantur 360 per numerum laterum (§. VIII) ubi innotescat quantitas anguli **EF** (§. 107) **D** (§. 59).
2. Constituatur is ad centrum (§. 155).
3. Chorda **ED** ad peripheriam toties applicetur

plicetur, quoties fieri potest.
Ita figura regularis erit circulo in=
scripta (T:342. 117). Q: e: f: et d:

Scholion.

354. = Resolutio Problematis prae=
sentis, et praecedentis mechanica
quidem est, cum ad constructionem
Instrumento transportatorio utamur
(T:155.) non tamen ideo contemnenda;
tum quia universalis, et facilis, tum
quia constructionis (ubi peractae in=
dicium praebet. Pentagoni, Decago=
ni, et Quindecagoni constructionem
tradunt Euclides (a) et Ptolomeus (b):
de qua in Analysi. Et quidem et Hepta=
goni, Enneagoni, et Hendecagoni con=
structiones Geometricae passim apud
Auctores, practicos inprimis occur=
runt: sed a rigore demonstrationum
abhorrent

(a) Elem: 4. prop: 11. 16. et Elem: 13 prop: 10.
(b) Almag: Lib: 1. c. 9. f: m: & conf: Joannes Regio=
montanus in epitome hujus Almag: lib: 1. prop: 1.

attrahens. Joh: Carolus Renaldinus (a) omnium polygonorum describendorum regulam *catolicam praescribit, passim in Geometriis practicis insertam: sed quantum fallat Cl: Wagnerus, Mathemat: in Accademia Helmstad: Professor ostendit, (b) et non inferius in Analysi ostendemus. *seu universali

Problema XLIV.

355. = Polygonum regulare quodcunque circulo circumscribere.

Resolutio. T: VIII

1. Inscribatur figura regularis similis circulo dato, v: gr: pentagonum A BCDE, et pentagonum abcde circumscribendum (T: 353). F: 107.
2. Chorda AB bifariam secetur in H, electam Fh ad eandem in H normalem (T: 110), quae arcum cognominem in h secat.
3. Per A, et B producantur radii FA, et FB.
4. Per H ducatur ipsi AB parallela radiis continu:

continuatis in a et b occurrens: eritque latus unum polygoni circumscripti.

5. Producantur radii FE, FD, FC, donec fiat Fe = Fd = FC = Fa, et puncta a, e, d, c, b connectantur rectis ae, ed, dc, cb: erit abcde polygonum circulo circumscriptum. Q. e. f.

Demonstratio.

Quoniam ab parallela ipsi AB per constr. erit angulus Fha = FHA (§. 133). Sed ob FH ad AB perpendicularem per constr. FHA rectus est (§. 78). Ergo etiam Fha rectus (§. 145) consequenter ab circulum in h tangit (§. 78. 304). Est vero etiam angulus Fab = FAB (§. 133), adeoque dimidius angulus polygoni (§. 347). Porro quoniam AB = AE per constr. et FA = FE = FB (§. 40); erit angulus bFa = aFe (§. 204). Quare cum etiam sit Fa = Fe per constr. et ob Fab = Fba per demonstrata, rectos ad h, et latus Fh utrique triangulo Fah

et Fhb

Fhb commune, Fb = Fa (§:151); erit ae = ab, et Fae = Fab (§:119), conſequenter a angulus polygoni, e. gr: in noſtro caſu pentagoni. Eodem modo oſtenditur, angulos quoque e, d, c, b eſſe angulos polygoni circumſcribendi; et ed = dc = cb = ab. Quod vero etiam ae circulum in g tangat, ita demonſtratur. Demittatur ex F perpendicularis ad ae (§:216); erit angulus ad g rectus (§:78). Quoniam porro Fah = Fag, demonſtrata, et Fa = Fa: erit Fh = Fg (§:151). Quare cum Fh ſit radius circuli constructi: erit etiam Fg radius circuli (§:40), atque adeo ae circulum in g tangit (§:304). Idem eodem modo oſtenditur de rectis ed, dc, bc: Polygonum itaque abcde circulo eſt circumſcriptum (§:117). Q. e. dem.

Theorema LXXVIII.

330. Latus hexagoni AB aequatur radio circuli circumſcripti AC. T: VIII Fi: 110

Demon-

Demonſtratio.

Angulus C = 60° (P. 57). Ergo A + B = 120° (P. 245), conſequenter eſt AC = BC (P. 40) A = B = 60° (P. 184). Quare Δ ACB aequilaterum (P. 254) conſequenter AB = AC (P. 57). Q. e. d.

Corollarium I.

357. = Hexagonum regulare circulo in-
I. ſcribitur, ſi radius ad peripheriam ſe-
xies applicetur.

Corollarium II.

358. = Si ſuper linea data AB hexagonum deſcribendum, triangulum aequilaterum ACB conſtruitur (P. 195) eſt enim vertex C centrum circuli hexagono quaeſito circumſcribendi (P. 336).

Problema XIV.

VIII. 359. = Datis omnibus lateribus figurae cujuſcunque, et tot diagonalibus, quot ſunt latera, demtis tribus, figuram conſtruere.

Reſolutio

Resolutio.

Cum figura quaelibet ABCDE per diagonales AC et AD in tot triangula BAC, CAD, DAE resolvatur, quot sunt latera demtis duobus; non alia re opus est, quam ut unum triangulum super altero excitetur (P. 105).

Problema XLVI.

360. = Datis omnibus lateribus figurae, et tot angulis quot sunt latera demtis tribus, figuram construere. D. V F. 111

Resolutio.

1. Ducatur recta AB uni datorum laterum aequalis.
2. Ad A, et B excitentur anguli eidem adjacentes (P. 155) et latera AE, et BC data debite determinentur.
3. Fiat porro in C angulus conveniens (P. 155) et determinetur latus DC.
4. Tandem ex E et D fiat intersectio in F intervallo laterum EF, et DF.

Ductis

Ductis enim DF, et EF, figura termi=
nabitur, eritque aequalis quaesitae (§.
161. 177).

Eodem modo construi possunt figu=
rae regulares ex latere, et angulo dato
(§. 166).

Corollarium.

361. = Si omnes anguli praeter unum
F dentur, duo latera DF, et FE, noscen=
tur opus non est.

Scholion.

362. = Tirones ut se exerceant in fi=
guris irregularibus describendis, latera
pro arbitrio in partibus ac digitis,
quantitates angulorum in gradibus
assumere debent. Quod si contingat fi=
guram non terminari, id indicio erit,
casum esse impossibilem, adeoque
vel in in angulorum, vel in linearum
quantitate, quaedam etiam immu=
tanda.

Problema.

Problema XLVII.

368. Areae cujusdam campeſtris rectilineae abcde libere permeabilis Ichnographiam perficere, hoc eſt, figuram areae campeſtri ſimilem deſcribere. D: VII. F: 111.

Reſolutio.

1. Inveſtigetur longitudo ſingulorum laterum ab, bc, cd, de, ea, itemque diagonalium ac, et ad (P: 120).
2. Conſtruatur figuram ABCDE (P: 359) juxta ſcalam geometricam minorem (P: 279).

Dico figuram ABCDEA eſſe figurae campi abcde ſimilem.

Demonſtratio.

Eſt enim AB : BC = ab : bc, BC : CD = bc : cd, CD : DE = cd : de & Etenim e: gr: ab, 6, et bc 7 pedum in campo exiſtentibus, etiam AB = 6, et BC = 7 in charta ex conſtr: Quare cum porro ſit

AC

AC : AB = ac : ab, AC : AD = ac : ad, AD : AE = ad : de & ſſ con: enib o = o, x = x, y = y, n = n, m = m, r = r, u = u, s = s, t = t (P. 107). conſequenter x + m + r = x + m + r, y + n = y + n, u + s = u + s (P. 88 c tuib.) Quamobrem figura ABCDE eſt figurae cum ſi abcde ſimilis (P. 105). Q. e. d.

Aliter.

VIII. P. 113

1. Poſita menſula ita in uno figurae angulo, ut punctum a vertici ejus immineat, ſſ dioptras regulae affixas collineatio fiat in baculos in ſingulis angulis B, C, D, E defixos, ducanturque lineae indefinitae ab, ac, ad, ae.

2. Inveſtigetur longitudo rectarum aB, aC, aD, aE (P. 126) et

3. Exinde juxta ſcalam modicam (P. 179) determinentur ab, ac, ad, ae.

4. Ducantur bc, cd, de.

Dico abcde eſſe ſimilem figurae ABCDE.

Demon=

Demonstratio.

Quoniam in △△ abc, et aBC angulus a communis, et ab : ac = aB : aC ex constru: erit angulus abc = aBC, et B acb = aCB, nec non ab : bc = AB : BC, et ac : bc = AC : BC (P. 137). Similiter quoniam in △△ acd, et aCD angulus a communis, et ac : ad = aC : aD, atque in △△ dae, et DaE angulus a ibidem communis, et ad : ae = aD : aE ex constr: erit angulus acd = aCD, et adc = aDC, nec non ac : cd = aC : cD, et ad : cd = aD : cD itemque angulus ade = aDE, et aed = = aED, nec non ad : de = aD : DE, et ae : ed = aE : ED (P. 137). Quoniam itaque a = a, b = B, acb + acd = aCB + aCD, h. e. c = C, adc + ade = aDC + aDE, h. e. d = D, et denique e = E ex demonstrata, figurae abcde, et ABCDE inter se aequiangulae sunt (P. 109). Porro cum sit ac : bc = = aC : BC, et ac : cd = aC : CD ex demon:

erit

erit etiam bc : cd = BC : CD (P. ig6 ctus),
et cum sit ad : dc = aD : DC, et ad : de =
= aD : DE per demon: erit denuo dc : de
= DC : DE. Quamobrem cum quoque
sit ab : be = aB : BC, et de : ed = aE : E
D per demonstrata; latera aequales an-
gulos comprehendentia proportiona-
lia sunt. Sunt itaque figurae abcde,
et aBCDE similes (P. 175) Q. e. d.

Aliter.

VIII. 1. Mensula intra figuram posita
Fi: 114. eligatur punctum f, ex quo per diopt.
regulae affixas ut ante collineatio
fiat in baculos in A, B, C, D, et E
defixos ducanturque rectae indefi-
nitae fa, fb, fc, &c.
2. Investigetur longitudo rectarum fA,
fB, fC, fD, fE (P. 106.)
3. Inde determinetur longitudo recta-
rum fa, fb, fc &c juxta scalam modi-
cam (P. 129).

4. Tandem ducantur ab, bc, cd &c.

Dico abcdeg esse figurae ABCDEG similem.

Demonstratio.

Angulus f utrique △△ fab et fAB communis, atque fa : fb = fA : fB (constr.). Ergo anguli ad a et A, item ad b et B aequales sunt, atque fa : ab = fA : AB (P. 137). Eodem modo ostenditur esse in △△ fga, et fGA angulos ad a, et A aequales, atque fa : ag = fA : AG, consequenter ab : ag = AB : AG (P. 196 Arith.) et angulus bag = BAG (P. 80 Arith.). Quare cum eadem ratione demonstratur, esse g = G, e = E, d = D, c = C, b = B, et ag : ge = AG : GE, ge : ed = GE : ED, ed : dc = ED : DC, dc : cb = DC : CB, et cb : ba = CB : BA, figura abcdeg est majori ABCDGE similis (P. 175). Quod erat demonstrandum.

Aliter

Aliter.

P:VIII. 1. Collocato inſtrumento goniometrico
F:111. in a inveſtigetur quantitas angulo:
rum x, m, r (P: 152) et longitudo recta:
rum ab, ac, ad, et ae (P: 126).

III 2. Conſtruantur juxta ſcalam modi:
cam △△ ABC, ACD, et ADE (P: 180)
Dico ABCDE eſſe similem figurae a
bcde.

Demonſtratio.

Coincidit cum secunda problema:
tis praeſentis.

Aliter.

P:VIII. 1. Collocato inſtrumento goniometri:
F:114. co in f, inveſtigetur quantitas an:
gulorum AfB, BfC, CfD, DfE,
EfG, GfA (P: 152), et longitudo re:
ctarum fA, fB, fC, fD, fE, fG
(P: 126).

2. Conſtruantur ut ante juxta ſca:
lam modicam △△ abfa, afg, gfe, e
fd

fd dfc, ec cf b (P: 180)

Dico abcdeg esse similem figurae ABCDEG.

Demonstratio

Coincidit cum tertia proble=
matis praesentis.

(Aliter) P: VIII

1. Pixis cum acu magnetica, cujus mar= P: III.
go in 360 gradus divisa, et quae in car:
dine meridiei, ac septentrionis dio=
ptris instructa, ita collocetur in a,
ut ejus centrum ipsi a immineat,
et per dioptras collineanti baculus in
b defixus occurrat, notetur que angu=
lus declinationis acus a linea Me=
ridiana pyxidis ipsi ab imminente
versus ortum, vel occasum.

2. Pyxidis dioptrae convertantur suc=
cessive ad baculos in c, d et e defixos,
notenturque, ut ante in singulis ca=
sibus anguli declinationis.

Investige=

3. Investigetur longitudo rectarum a b, ac, ad, ae (§. 126).
4. Ducatur in charta recta L M, et assumto in ea puncto A applicetur centrum instrumenti transportatorii, et fiant anguli i, x, m, r angulis declinationum rectarum ab, ac, ad, ae aequales (§. 155), atque ex earum longitudine per scalam modicam determinetur longitudo ipsarum AB, AC, AD, AE (§. 129).

Dico figuram ABCDE esse alteri abcde similem.

Demonstratio

In campo acus magnetica semper eidem lineae respondet in plano horizontali imaginario mundi, quod immobile est, etsi diversè in pyxide successive immineat. Lineam istam designes in charta recta L M, et puncto A centrum arcus, ex quo descriptus est

Circulus

Circulus. Quod ei jam linea meridiana pyxidis admovebur lateri AB, eius principium numerationis in g, et acus indicabit in f quantitatem anguli i. In Instrumento transscribatorio initium numerandi fit in f, et ei arcus fg declinationi in Campo observatae aequalis assumitur, angulus i idem erit, qui ante, situsque lineae AB ibi determinatur: Arcus enim fg perinde metitur declinationem ipsius AB a linea meridiana, quam monstrat arcus, sive numerandi principium in f, sive in g fiat. Eodem modo liquet, arcus fh, fk, fl determinare situm rectarum AC, AD, AE respectu lineae LM, consequenter anguli x, m, r in figura ABCDE erunt aequales totidem cognominibus in altera abcde. His suppositis reliqua demonstrantur ut supra in demonstratione secunda

Aliter

XIV. P. 174 Quodsi pyxis cum acu magnetica dioptris non fixis instructa, sed lignea regula fg recta affixa; ut linea meri= diana ejusdem bd, transiens per centrum pyxidis c, sit eidem parallela.

1. Regula fg ad latus figurae AB ap= plicetur, quo facto AB erit ipsi bd parallela.

2. Notetur gradus, quem indicat acus magneticae de circa centrum c li= bere mobilis cuspis a: dico esse angu= lum bca ipsi BAL aequalem, si ML ducatur acui magneticae ae in I productae parallela.

3. Eodem modo ex regula, cui pyxis af= fixa, applicetur diagonali AE, et re= ^ ae cta designet situm acus, bd au= tem ipsi AE parallela lineam me= ridianam pyxidis; erit angulus acb ipsi EAL aequalis. Cetera igitur pe= raguntur, ut ante. De=

Demonstratio.

Id tantummodo demonstrari debet, angulum acb esse ipsi BAL, et in altero situ pyxidis ipsi F.AL aequalem. Quoniam ex resolutione patet, ta esse ipsi BA parallelam, erit angulus IHA ipsi ecd (per P. 133), consequenter ejus verticali bca aequalis (P. 156 Geom.; et P. 87 Arith.). Similiter cum sit ML ipsi Ia parallela, per constr. erunt alterni IHA, et HAL aequales (P. 133) consequenter HAL = bca (P. 87 Arith.) Quod erat unum.

Similiter si pyxis ad diagonalem AE applicetur, cum sit bd ipsi EA parallela, vi Solutionis; erit NKA = ecd (P. 133). Quare cum porro sit bca = ecd (P. 156); erit NKA = bca (P. 87 Arith.).

Denique quia acus magnetica pyxide quomodocunque promota situm obtinet priori, quem habuerat parallelum, estque adeo Na ipsi Ia parallela; ML vero paralle-

parallela ipsi Ia ∥ constru: cum enim M L ipsi Na parallela, (P. 130) consequenter N KA = EAL (P. 133) ac ideo EAL = bca (P. extrus). Quod erat ostendum.

Aliter.

T:IX F:115 1. Charta supra Mensula expansa ex centro o describatur circulus.

2. In eodem defigatur Stilus, cui inse=ratur Regula cum dioptris.

3. Collimetur in singulos areae an=gulos A, B, C & notentur que in peri=pheria Circuli puncta diametrali=ter opposita a et a, b et b, c et c.

T:IX. F:116. 4. Investigetur longitudo rectarum o A, o B, o C &c (P. 120).

5. Charta e mensula remota alteri man=data coextendatur in tabula, et Paral=lelismus ad aa applicatus arbitrario in=tervallo aperiatur, donec in charta munda ipsi parallela A A commode duci possit (P. 188).

6. Idem

6. Idem parallelismus applicetur ad bb, et eo usque aperiatur, donec recta BB huic parallela ducta alteram AA ipsi aa parallelam in puncto commodo O intersecet.

7. Applicetur porro successive ad rectas cc, dd, ee, quae confusionis evitandae gratia in Schemate non omnes sunt expressae, et aperiatur usque ad punctum intersectionis O ipsis aa, et bb parallelam, ducanturque per idem dictis cc, dd, ee parallelae CC &c.

8. Tandem ex puncto intersectionis O convenienter determinetur longitudo rectarum ipsis oA, oB, oC &c respondentium juxta Scalam modicam (Fig. 79). Ita enim ut supra Ichnographiam absolvere licebit.

Demonstratio.

Coincidit cum tertia probl: praeced. IX modo demonstretur, si plures lineae aa, F: 116 bb, cc &c

bb, cc se intersecent in o, et iis ducan:
tur totidem aliae parallelae AA, BB, CC se ibidem in O intersecantes, fore $y=m$, $x=n$, $z=l$. Quod facile patet. Continuetur enim BB, donec ipsi aa occurrat in f; continuentur etiam CC, et cc, donec ipsis bb, et AA occurrant in g, et k. Tum, ob parallelas aa, et AA, $m=f$ et, ob parallelas bb, et BB, $y=f$ (P. 133) adeoque $m=y$ (P. 61 citat.). Similiter ob parallelas bb et BB $n=g$ et, ob parallelas cc et CC, $x=g$ (P. 133), adeoque $n=x$ (P. 61 citat.). Item ob parallelas aa et AA, $z=k$ et, ob parallelas cc et CC, $l=k$ (P. 133) adeoque $l=z$ (P. 61 citat.) Q. e. d.

Scholion I.

804 = Ideo commendatur methodus ultima, quod exigua eaque unica charta ingenti tractui dimetiendo sufficiat. Si enim Campus in plures resolutus

reſolutus fuerit partes, litera initialis in ſingulis nova quadam numericam notanda est, ubi unum alphabetum fuerit abſolutum, aliud litteris aliis uſurpandum.

Scholion II.

365. = Etiam sine parallelismo Ichnographiam facillime dabunt, si puncta a, et a, item b, c, d, f subtili acu perforentur et per foramina pulvis carbonum linteo incluſus trajciatur. Puncta enim a et a dabunt rectam, quae bifariam diviſa determinatur centrum O: reliqua puncta b, c, d, f situm angulorum figurae reſpectu hujus centri determinant.

Scholion III.

366. = Acus magnetica ex optima chalibe cudenda, nec foraminibus (quod ornatus gratia interdum fieri solet ab ignaris) pertundenda, quoniam vis magnetica per lineam rectam diffunditur.

ditur. Ejus longitudo 6 digitos ne su-
peret, nec Sphaeram magnetis excedat;
a duobus ne deficiat. Praestat major
minore, ut angulus, quo in usu a linea
meridiana pyxidis declinat, exactius
innotescat. Communiter utuntur
acu duorum, vel ad summum trium
digitorum. Uno magnetis polo cum a-
liqua mora eam affricari sufficit:
affricanda autem est pars acus, quae
septentrionem respicere debet, polo au-
strali, nec ductu contrario destruen-
dum, quod anterius communicatum
fuerat. In hemisphaerio septentriona-
li, quod nos inhabitamus, pars acus
borealis post contactum magnetis
ponderosior evadit, et inclinatur:
quare levior fieri debet australi. Py-
xis ex ligno, ebore, vel orichalco; sti-
lus, cui capitellum acus ex aere, cu-
pro, vel argento inditus in conum ex-
cavatum

cavabum imponibur ex orichalco, vel ar=
gento paratur. Ut acus tanto exacti=
us sistatur, quidam styli apicem
chalybeum faciunt.

Problema XLVIII.

364. = Ichnographiam Areae AB Tab: IX
CDE ex duabus stationibus A et B Fig: 117
perficere.

Resolutio.

1. Posita mensula in A collineatio
fiat in singulos areae angulos B,
C, D, et E, ducanturque rectae
versus eos ex a.

2. Quaeratur distantia stationum
AB (§. 126) et in mensulam ex Scha=
la Geometrica (§. 291) transfera=
tur in ab.

3. Mensula ex A defertur in B, ita
ut punctum cognomine b in ea
designatum ipsi B respondeat, et
regula ad lineam ba applicata,
dioptras

dioptras collineantur baculus in A deſixus occurrat.

4. Ex puncto b in singulos rurſus figurae angulos collineatio fiat, et verſus eos rectae ducantur, quae priores in e, d, c interſecant.

5. Denique jungantur puncta a et e, e et d, d et c, rectis ae, ed, dc.

Dico, Ichnographiam eſse abſolutam.

Demonstratio.

Quoniam 1.° ABC = abc, et CAB = = cab (1 conſtr.) erit AB : BC = ab : bc, ac AB : AC = ab : ac (P. 2 6.) Similiter 2.° quia EAB = eab, et EBA = eba (4 conſtr.) erit AEB = aeb; itemque EA : AB = ea : ab, et EB : AB = eb : ab (P. cit.) Porro 3.° DAB = dab, et DBA = dba; erit etiam DA : AB = da : ab et DB : AB = db : ab (P. cit.) 4.° DBC = dbc (4 conſtr.) et quoniam DB : AB = db : ab (per num. 3) atque AB : BC =

BC = ab : bc (per num: 1.) DB : BC = db : bc (P: 194 c Arith:) Ergo CDB = cdb, atque BCD = bcd, et BC : CD = bc : cd, nec non BD : CD = bd : cd (P: 183). 5.º DB : BC = db : bc (per demonstrata n: 4.) et AB : BC = ab : bc (per num: 1.) Ergo DB : AB = db : ab (P: 195 c Arith:). Est vero etiam EB : AB = eb : ab (per num: 2.). Ergo DB : EB = db : eb (P: eiusd.). Quare cum etiam sit DBE = dbe (per constr.) erit BDE = dbe, et DEB = deb, necnon DB : DE = db : de, et DE : EB = de : eb (P: 183). 6.º BD : CD = bd : cd (per num: 4.) et DB : DE = db : de (per num: 5). Ergo CD : DE = cd : de (P: 195 c Arith:). 7.º EB : AB = eb : ab (per num: 2) et DE : EB = de : eb (per num: 5). Ergo DE : AB = de : ab (P: 191 c Arith). Quare cum porro sit EA : AB = ea : ab (per num: 2) erit DE : EA = de : ea (P: 195 c Arith). 8.º Quia CDB = cdb (per num: 4) et BDE = bde (per num: 5) erit

CDE

CDE = cde (P: 86 Arith:). g°. Similiter quia A[illegible]EB = deb (p num: 1) et DE B = deb (p num: 5) erit DEA = dea (P: 86 Arith:). Cum itaque sit EAB = eab, et ABC = abc (p constr:), BCD = bcd (p num: 4), CDE = cde (p num: 8), et DE A = dea (p num: 9); atque praeterea AB : BC = ab : bc (p num: 1), BC : CD = bc : cd (p num: 4), CD : DE = cd : de (p num: 6), DE : EA = de : ea (p num: 7), tandemque EA : AB = ea : ab (p num: 1); figurae ABCDE altera abcde similis est (P: 115). Q. e. d.

Aliter

IX
Fig: 117.

1. In A investigetur ~~longitudo re-ctarum~~ quantitas angulorum EAD, DAC, et CAB, itemque ex B quantitas angulorum ABE, EB D, et DBC (P: 151), quaeraturque stationum distantia AB (P: 116).

2. Ducta in charta (lecta ab p scalam

modica

modicam distantiae stationum AB convenienter determinetur (§. 129).
3. In a constituantur angulis EAD, DAC, CAB aequales ead, dac, cab; in b vero ipsis ABE, EBD et DBC aequales abe, ebd, et dbc (§. 155).
4. Tandem juncta intersectionum b, c, d, e, a, rectis connectantur.
Dico abcde esse similem areae ABCDE.

Demonstratio.

Coincidit cum praecedente.

Aliter.

1. Ope pyxidis magneticae observentur ut in probl: praec: ex duabus stationibus A, et B declinationes linearum AB, AC, AD, AE itemque BC, BD, BE a linea meridiana acus.
2. Quaeratur distantia stationum (§. 126.)

3. In

3. In charta eodem modo, quo in prob: praec: determinentur ſitus rectarum ab, ac, ad & puncta interſectionum c, d, e, rectis connectantur.

Ita Ichnographia erit abſoluta.

Demonſtratio.

Coincidit cum praecedente, modo una notentur, quae in demonſtratione penultima problematis praecedentis dicta ſunt.

Problema XLIX.

368. Ichnographiam areae perficere, cujus integram peripheriam peragrare licet.

Reſolutio.

IX 1. Menſula in A collocata collineetur in baculos B et E defixos,
F. 117. ut angulo BAE aequalis bae in eadem deſignari poſsit.

2. Longitudo utriusque rectae AB et AE (§. 116) explorata ex ſcala minore,

e minore transferatur in mensulam ex aintebe (§. 279).

3. Mensula in B transferatur, ita ut ipsi B punctum cognomine in eadem respondeat, et visus dispositas collineanti oculum in A attingat. Quo facto –

4 Idem dirigatur per easdem in C, quo sicut ante, angulo ABC aequalis abc, et rectae BC proportionalis bc in mensula designari possit.

5. Quod si idem cum reliquis areae angulis et lateribus fiat, erit figura in mensula delineata areae propositae similis.

Demonstratio.

Singuli enim anguli figurae in mensula delineatae sunt aequales singulis angulis areae, et latera illius lateribus hujus homologis proportionalia sunt per. Figura igitur delineata est areae similis (§. 115.) Q. e. d.

Aliter

Aliter.

Quaeratur longitudo omnium laterum (§. 116.) et quantitas totangulorum, quot sunt latera, demtis tribus (§. 151.). His enim datis Ichnographia per prob. 46 (§. 360.) vi demonstrationis praecedentis absolvetur.

Aliter.

IX. 1. Notetur in singulis angulis figurae ABCDE, laterum AB, BC, CD, DE, AE, declinatio a linea meridiana pyxidis magneticae, ut in probl. 47 (§. 363.).

2. Quaeratur simul longitudo laterum (§. 116.).

3. In charta designetur linea ab, et in eam transferatur ex scala modica longitudo lateris AB (§. 119.).

4. Ad rectam ab applicetur latus pyxidis lineae ejusdem meridianae parallelum, ita tamen ut extremum

mum ipsius septentrionale septen=trionem respiciat, et clarta cum pyxi=de huc illucque moveatur, donec acus an=gulum declinationis debitum monstret.

5. Clarta immota idem latus pyxidis collocetur in a, et circa id vertatur, donec angulum declinationis con=venienter alteri AE indicet acus: ibi enim lectam se ducere, et ipsea illam modicam ipsi AE perpendiona=lem determinare licet.

6. Quodsi haec operatio continuetur; Ichnographia tandem absolvetur.

Demonstratio.

Non aliud hic demonstrandum est, quam angulum bae ope pyxidis magne=ticae nullis dioptris instructae, in clarta sic designatum esse alteri B AE in campo aequalem. Superius usum pyxidis magneticae nullis dioptris instructae exponentes demonstravi=mus

mus, pyxide ad latus figurae **AB** in
campo ita applicata, ut linea meri:
diana ejusdem sit huic parallela, an:
gulum declinationis acus esse ipsi
BAM aequalem, si **ML** ita ducatur
ope pyxidis, ut ejusdem lineae meridia:
nae parallela existat (§. 363). Eodem
modo ex ibidem demonstrationis ap:
paret, pyxide eadem lege ad latus
figurae **AE** applicata, esse angulum
EAL angulo declinationis acus in
hoc situ aequalem. His jam datis, si
latus pyxidis lineae meridianae ejus:
dem parallelum ad rectam ab in:
charta ductam applicetur, et char:
ta cum pyxide vertatur, donec acus
in convenienti situ angulum de:
clinationis eundem, quem in campo
ad latus **BA**, monstret; erit perin:
de ta **K** eidem angulo declinationis
aequalis. Similiter si eadem lege py:
xidis

xidis applicetur ad punctum a donec acus angulum declinationi lateris A E convenientem monstret, et juxta ejus latus ducatur ae; erit angulus eaI angulo declinationis aequalis. Supponimus nempe rectam KI (F) ea lege esse ductam, ut lineae meridiane pyxidis in plano Mundi immaginario immobili respondeat centro in a collocato. Est igitur r = I, et 6 = VI (F constr.) sed r + 7 + 6 = 180°, et r + VII + VI = 180° (P: 147) consequenter r + 7 + 6 = r + VII + VI (P: 87 Arithm.) Quare 7 = VII (P: 91 Arith.) Q. e. d.

Vel

1. In charta ducantur lineae quotcunque parallelae. P: IX P: 118 n: 2.

2. Instrumentum transportatorium parallelismo instructum ad extimam parallelarum ita applicetur, ut centrum sit in a, radius vero ipsi K

respon:

respondeat, notetur que punctum z in-
dicans in peripheria instrumenti gra-
dum declinationis acus a linea meri-
diana pyxidis in campo ad punctũ
A.

3. Ab a producatur recta, et ex a in b trans
feratur ex scala modica longitudo re-
ctae AB in campo mensuratae.

4. Regula parallelismi altera unam
parallelarum stringente, altera cui
cohaeret instrumentum transporta-
torium promoveatur, donec hujus cen-
trum ipsum b attingat, et ad gradum
declinationis in B observatae designe-
tur punctum y: quo facto, integra ac-
ae Ichnographia tandem absolvetur.

Demonstratio.

1=I, 2=II, 3=III, 4=IV, 5=V, ꝑ constr.
et quoniam recta ꝑ b ducta (quae
diametrum instrumenti transporta-
torij refert) ipsi a K parallela ꝑ constr.

acus

acus vero magnetica in B est parallela situi in A; erit 2 = 8; et I = VIII (§. 133), consequenter 8 = VIII (§. 87 Arith.). Simili modo ostenditur esse 6 = VI. Quare cum sit 2 + 7 + 6 = I + VII + VI (§. 147 Geom. et §. 87 Arith.), erit 7 = VII (§. 91 Arith.) Porro 2 = II (p. constr.) et 8 = VIII (p. demon.). Ergo 8 + 2 = VIII + II (§. 88 Arith.). Similiter 12 = 2 et XII = II (§. 133), et 3 = III (p. constr.). Quare cum sit 12 + 9 + 3 = XII + IX + III (§. 147), erit 9 = IX (§. 91 Arith.) Porro 4 = IV (p. con.) et hinc cum sit 10 = 3, et X = III (§. 133) adeoque ob 3 = III (p. demon.) 10 = X (§. 87 Arith.), 4 + 10 = IV + X (§. 88 Arith.). Denique 5 = V (p. con.) et 4 + 11 = IV + XI (§. 133 Geom. et 87 Arith.) adeoque ob 4 = IV (p. con.) 11 = XI. Quare 5 + 11 = V + XI (§. 88 Arith.) Singuli igitur anguli figurae abcde sunt aequales singulis angulis areae ABC DE

DE. Quare cum etiam latera illius habentibus hujus homologis proportionalia sint (per constr:) figura abcde aequae ABCDE similis (§. 125. Q. e. d.

Problema L.

369. Figurae in charta delineatae similem in campo designare.

Resolutio.

Quoniam hoc problema est inversum alterius, quo ichnographias arearum paramus; non modo hos ejus dantur casus, quos hujus commemoravimus, sed et ipsius resolutio ex resolutionibus problematum immediate praecedentium intelligitur. E. gr. Si semicirculo, vel mensula, et pertica utimur: anguli singuli figurae aut anguli diagonalibus interceptis in solo designantur (per prob: 7. (§. 155.) et latera, vel diagonales per mensulam majorem decenter determinantur.

Caput VI

Caput. VI.

De figurarum dimensione, ac Divisione.

Problema LI.

370. Invenire aream quadrati.

Resolutio.

1. Quaeratur Longitudo Lateris (§. 126).
2. Haec ducatur in seipsam.

Factum exprimit aream quadrati.

Sit e.gr. Latus quadrati = 345

erit Area = 119025.

Demonstratio.

Aream quadrati investigans quaerit: X. quot digiti quadrati, hoc est, quot quadrata digitum longa et lata in eodem contineantur (§. 118). Evidens vero est, si Latus quadrati AB concipiatur in quotcunque partes aequales, et quadratum ipsum rectas puncta divisionum in Lateribus oppositis connectentes

tet in quadrata minora diviſum; tot eſse quadratulorum series, quot partes habet latus AB, et in qualibet serie tot (le)periri quadratula, quot latus BC vel idem AB habet partes. Numerus ergo quadratulorum invenitur, si latus in ſeipsum ducatur. Q: e: d:

Corollarium I.

311. Si latus quadrati fuerit 10, area erit 100. Cum igitur decempeda sit decem pedum, pes 10 digitorum &c (§. 15): pertica quadrata 100 pedes quadratos; pes quadratus 100 digitos quadratos &c continet (§. 118).

Corollarium II.

312. Si latus quadrati fuerit 12, area erit 144. Quare, cum pertica dividatur in 12 pedes; pes in 12 digitos &c pertica quadrata continet 144 pedes quadratos; pes quadratus 144 digitos quadratos &c (§. 118).

Corollariū

Corollarium III.

313. = Datus igitur numerus sin prio=ri casu facile in digitos, pedes, et perticas quadratas resolvitur, si scilicet a dextra sinistram versus duae notae digitis, duae pedibus rescendur quae enim sinistram versus residuae fiunt, perticis cedunt. E: gr: 119015 digiti conficiunt 11 perticas, 90 pedes, 15 digitos.

Corollarium IV.

314. Quadrata sunt inter se in ratione duplicata laterum (§: 159 et 116 h:) E: gr: Quadratum lateris dupli est quadruplum quadrati lateris simpli. Et quadrata aequalia sunt, quorum latera aequalia sunt.

Problema LII.

315. Invenire aream Rectanguli ABCD.

Resolutio.

1. Inve:

ab: 1. Investigetur Longitudo laterum AB, et AC (§. 126).
IX
§. 100. 2. Ducatur AB in AC. Factum erit area Rectanguli.

Demonstratio.

Eadem est, quae problematis praecedentis.

Corollarium I.

376 = Rectangula sunt in Ratione composita suorum laterum AB, et AC (§. 159 Arith.)

Corollarium II.

377 = Si ergo fuerint tres lineae continuae rectae proportionales, quadratum medie rectangulo extremarum aequale est (§. 198 Arith.)

Corollarium III.

378 = Si quatuor fuerint lineae rectae proportionales, rectangulum sub extremis aequatur rectangulo sub mediis (§. 197 Arith.)

Corollariu

Corollarium IV.

379. Quare si ex eodem puncto A ducantur rectae, quarum altera AD circulum tangit, altera AB secat; erit quadratum tangentis AD rectangulo sub secante AB, et ejus portione extra circulum AC aequale (§. 334, et 377). T: VIII. F: 101.

Corollarium V.

380. Si duae, vel plures secantes GL et GM ex eodem puncto G ducantur; erunt rectangula sub totis et earum partibus extra circulum aequalia (§. 333, et 378). T: VIII. F: 97.

Corollarium VI.

381. Si duae chordae HM et LI se mutuo secent in in K; erunt rectangula sub segmentis inter se aequalia (§. 331. 378). T: I. F: 14.

Corollarium VII.

381. Cum orgya, qua lignorum strues metimur

metimur vel quadrati, vel (Rectangu-
li figuram habent, ejus areae Pro-
ductum: praec: vel praes: inveniri po-
test. Per hanc itaque si factum ex
Longitudine in Latitudinem strui/
dividatur, quotus indicat quot ipsa
orgias contineat. (§. 19. ctiuis.)

Theorema LXXIX.

IX 363. Duo parallelogramma AB
F. 101. DC et EFCDF super eadem basi
CD et in easdem parallelas AF et
CD constituta sunt inter se aequa-
lia.

Demonstratio.

Quoniam AB et CD, itemque
EF et CD sunt latera opposita
parallelogrammi, ergo: (eris: AB
= CD et EF = CD (§. 335), conse-
quenter AB = EF (§. 51 ctiuis) et
hinc porro AE = BF (§. 55 ctiuis.)
Quoniam vero AC = BD et CE

= DF (§. 335); erit Δ ACE = BDF (§. 204), adeoque ABGC = FEDG (§. 91 Arith.) consequenter ABDC = EFDC (§. 88 Arith.). Q. e. dem.

Corollarium I.

384 Quoniam AF et CD sunt parallelae, Hypothesin; erunt perpendicula inter easdem intercepta aequalia (§. 226): quae cum sint altitudines parallelogrammorum (§. 227); parallelogramma inter easdem parallelas constituta ejusdem altitudinis sunt. Patet adeo parallelogramma super eadem basi et ejusdem altitudinis aequalia esse (§. 383).

Corollarium II.

385 Ergo et triangula super eadem basi, et ejusdem altitudinis aequalia sunt. Nam parallelo: ACDB = Parallelo: EGDF (§. 384). Sed Δ ACD = $\frac{1}{2}$ Parall: ACDB, et Δ FCD = $\frac{1}{2}$ Parall. EC

ECDF (§:337). Ergo △ ACD = △ FCD (§:94 Arith:).

Corollarium III.

386. Quodcunque adeo triangulum CFD est dimidium parallelogrammi ACDB super eadem, vel aequali basi CD, et ejusdem altitudinis seu easdem parallelas. Nam △ CFD = △ ACD (§:337). Sed △ ACD = $\frac{1}{2}$ Parall: ACDB (§:355). Ergo △ CFD = $\frac{1}{2}$ Parall: ACDB (§:87 Arith:).

Problema LIII.

387. Invenire aream Rhombi, et Rhomboidis, seu parallelogrammi obliquanguli.

Resolutio.

T:X. Fi:m. 1. In CD pro basi assumtam demittatur perpendiculum AE (§:116), quae erit altitudo parallelogrammi (§:227).

2. Multiplicetur basis per altitudinem

e: gr:

Exgr. Sit CD = 4° 5′ 6″
AE = 2 3 4

1824
1368
912

Erit Area 10° 67′ 04″

Demonstrio.

Parallelogrammum obliquangulum aequale est ~~~~~ rectangulo super eadem basi CD, et ejusdem altitudinis AE (§. 384). Sed area rectanguli aequatur facto ex basi in altitudinem (§. 375 et 219). Ergo eidem aequalis est area parallelogrammi obliquanguli (§. 87 Arith.) Q. e. d.

Corollarium I.

388. Parallelogramma sunt in ratione composita altitudinum, et basium (§. 159 Arith.), adeoque et triangula eorum dimidia (§. 386) in eadem existunt (§. 181 Arith.)

Corolla=

Corollarium II.

389\. Ergo si altitudines sunt aequales, basium; si bases sunt aequales, altitudinum rationem habent (§. 181 cit.)

Corollarium III.

390\. Parallelogrammata aequalia bases et altitudines reciprocas habent (§. 199 cit.)

Theorema LXXX.

T. IX F. 103. 391. Triangulum est aequale parallelogrammo super eadem basi, sed dimidiae altitudinis, itemque parallelogrammo super dimidia basi, et ejusdem altitudinis.

Demonstratio.

Sit AEFB parallelogrammum rectangulum, cum obliquangulo cuicunque, super eadem basi AB et intra easdem parallelas AB, et EF existentibus aequale sit (§. 383) atque adeo eidem salva quantitate substitui possit (§. 15 cit.) Nam

I. Si

(252)

I. Si triangulum ADC fuerit rectangulum aſſumatur AD pro baſi, erit CD altitudo; sumta vero DC pro baſi erit AD altitudo (§. 118). Jam cum altitudo parallelogrammi rectanguli AE (§. 119) sit altitudini dimidiae trianguli GG aequalis per hyp: et angulus ad D ſit rectus (§. 91) adeoque et EF et AB parallelas (§. 101) is ad G ſimiliter rectus (§. 133) ac praeterea angulus ad E ibidem rectus (§. 100), et line G = E (§. 145); sint vero etiam verticales ad H aequales (§. 156): erit Δ CGH = Δ EHA (§. 151), conſequenter EGDA = Δ AGD (§. 88 c. Ariv.) Q. e. d.

II. Si triangulum ACB fuerit obliquangulum, per perpendiculum DG in duo rectangula ADC et CD B reſolvetur (§. 18. 91). Ergo ſi fiat FB = DG dimidiae altitudini erit DGFB

DGFB = $\triangle$ DCB, et AEGD = $\triangle$ AC D, per caſ. 1. Ergo AEFB = $\triangle$ ACB (§. 88 Arith.). Quod erat unum.

X. Sit DK = KB = $\frac{1}{2}$ DB et GD = AG = $\frac{1}{2}$ AD; erit GK = $\frac{1}{2}$ AB adeo:

114 que dimidia baſis. Jam GFKD = $\triangle$ DCB et GECD = $\triangle$ ACD per caſ. 1. Quare EGKF = $\triangle$ ACB (§. 88 Arith.) Quod erat alterum.

Problema LIV.

391. Invenire aream Trianguli.

Reſolutio et Demonſtratio.

X. 1. Multiplicetur baſis AB per altitu:

125. dinem CD: erit productum area rectanguli ejuſdem baſeos, et alti: tudinis (§. 387).

2. Productum dividatur bifariam. Ita prodit area trianguli ABC (§. 386).

Aliter.

Baſis dimidia $\frac{1}{2}$ AB multipli: cetur per

cetur ∥ altitudinem CD, vel basis AB ∥ altitudinem dimidiam ½ CD, factum erit area trianguli (P. 391. 387).

E. gr. AB = 3° 4' 2''	AB = 3° 4' 2''
CD = 234	½ CD = 117
1368	2394
1026	342
684	342
80028 Δ	40014

Δ ACB ∥ 40014

½ AB = 1° 7' 1''
CD = 234

684
513
342

Δ 40014

Corollarium I.

393. Triangula aequalia bases, et altitudines dimidias (P. 391. &c.), consequenter etiam bases, et altitudines integras reciprocant (P. 178. c. &c.)

Corollarium

Corollarium II.

394. Si Area trianguli per basin dimidiam dividitur, quotient est altitudo (P. 210 et sq.)

Problema LV.

395. Invenire Latus quadrati parallelogrammo, vel triangulo dato aequalis.

Resolutio.

Quaeratur inter basin, et altitudinem parallelogrammi, vel inter dimidiam basin, et altitudinem, aut integram basin, et dimidiam altitudinem trianguli, media proportionalis (P. 317) aut in numeris (P. 301 et sq.). Ita prodit Latus quadrati quaesitum.

Demonstratio.

Factum enim ex basi in altitudinem exprimit aream parallelogrammi (P. 375. 387.), et factum ex dimidia

dimidia basi in altitudinem, vel ex di=
midia altitudine in basin aream tri=
anguli (§. 391). Cum adeo quadratum
lineae, vel numeri sic reperti, sibi in utro=
que casu facto ipsi aequale (§. 295 et 4.)
ert quadratum istud in priori casu
parallelogramo, in posteriori triam=
gulo dato aequale. Q. e. d.
Theorema LXXXI.
396. In Parallelogrammis, et Triangulis fig. X
similibus, altitudines sunt lateribus fig. 124
homologis proportionales, et bases altis
lateribus proportionaliter secantur.
Demonstratio.
Cum altitudines AE, et ae sint ad
bases CD et cd perpendiculares (§. 117),
erunt E et e anguli recti (§. 78) adeoque
aequales (§. 145). Et quia parallelogram=
mum ABDC ipsi abdc, triangulum
CAD ipsi cad simile, erit c =
C (§. 115). Quare AC:AE = ac:ae (§.
263).

(167). Eſt vero etiam **AC : CD** = ac : cd (§. 175). Ergo **AE : CD** = ae : cd (§. 196 ch.) Quod erat unum;

Quoniam **E** = e, et **C** = c, per demonſ: e i i t **AC : CE** = ac : ce (§. 167). Eſt vero etiam **AC : CD** = ac : cd (§. 175). Ergo **CE : CD** = ce : cd (§. 192 c ttis), adeoque **ED : CE** = ed : ce (§. 193 c ttis). Q. e. d.

I. Scholion.

89. Patet quoque a priori. Quoniam enim **ABDC** ∾ abdc et △ **ACD** ∾ △ acd, per hypoth: perpendicula **AE**, et ae, pariterque segmenta baſium **CE**, et ce ibidemque **ED** et ed eodem modo determinantur (§. 119. 115) adeoque ſimilia ſunt (§. 119). Cum adeo ea eadem ſint quae inviſem a ſe diſcerni debeant (§. 14 ctiich:) per ~~[illegible]~~ Lineae autem rectae ~~[illegible]~~ ſimiles (§. 119) non aliter niſi ſitione diſcerni poſſint (§. 131 c ttis), tam perpendicula

dicula, quam segmenta baſium ad late=
ra homologa figurarum eandem ratio=
nem habere debent (§. 149 Arith.) Eodem
modo generaliter patet (lectas quaſcun
que in figuris ſimilibus eodem modo
determinatas, tam inter ſe, tum ad
latera homologa eandem rationem
habere.

Corollarium I.

398. Quoniam parallelogramma, et
triangula ſunt in ratione compoſita
altitudinum, et baſium (§. 388), ſimi=
lia vero habent baſes altitudinibus pro=
portionales (§. 395); igitur parallelo=
gramma, et triangula ſimilia habent
rationem duplicatam homologorum
laterum (§. 159 Arith.) et eodem modo
patet, quod etiam ſint in ratione du=
plicata altitudinum, ac segmento=
rum baſeos; imo linearum eodem
modo ubilibet determinatarum (§. 397).

Corollarium

Corollarium II.

399. Sunt ergo ut quadrata laterum altitudinum, et segmentorum basium homologorum, nec non linearum eodem modo utilibet determinatarum (P. 314.)

Problema LVI.

400. Invenire aream polygoni irregularis, ac trapezii.

Resolutio.

X. 1. Resolvatur per diagonales AD, et
1.106. AC in triangula.

2. Inveniantur areae singulorum triangulorum (P. 391.) et

3. Addantur; erit summa area quaesita (P. 10 Arith.)

E. gr. $\frac{1}{2}$ AD = 43′ $\frac{1}{2}$ AD = 43′ $\frac{1}{2}$ AC = 42′
EF = 35 GC = 45 BH = 30

215 | 215
Lag. 172 | ABC, 1260

▵ AED 1505 ▵ DAC, 1935
▵ AED, 1505
▵ ABC, 1260

Area polygoni irreg: 4700 — Quod si

Quod si ½ AD multiplicetur per summam altitudinum EF + GC, vel integra AD per ½ (EF + GC), prodibit area trapezii AEDC.

E. gr. EF = 35 ... AD = 43
GC = 45 EF + GC = 80

EF + GC = 80 AEDC = 3440

½ (EF + GC) = 40
AD = 86

AEDC = 3440.

Similiter si in trapezio fuerit AB ipsi CD parallela, erunt triangulorum altitudines BF, et GC aequales (§. 116. 117.) consequenter trapezii area prodit ducta semisumma basium parallelarum AB, et CD in altitudinem ejus BF (§. 99.)

E. gr. Sit AB = 46'', CD = 578'', BF = 195''
erit AB + CD = 624
BF = 196

3120
5616
624

Area trapezii 121680: c Theorema

Theorema LXXXII.

VIII. 107. 401. Figura regularis ABCDE ex centro circuli circumscripti F in triangula aequalia, atque similia resolvitur et area ejus aequatur triangulo, cujus basis perimetria totius polygoni AB + BC + CD &c. altitudo perpendiculum FG ex centro F in latus unum AB demissum. Idem valet de area circumscripti abcde, nisi quod altitudo sit radius Fg.

Demonstratio.

Quoniam AB = BC = CD = DE = EA (§. 100.) et AF = FB = FC = FD = FE (§. 40.) triangula AFB, BFC, CFD, DFE, EFA aequalia et similia sunt (§. 104.). Quod erat unum.

IX. 118. Constituuntur triangula AFB, BFC, CFD &c. in quae resolutum est polygonum ABCDE

super

super eadem recta AA (§. 199). Erigatur in A perpendicularis A (§. 149) ipsi altitudini triangulorum aequalis. Erit AfB = AFB, BfC = BFC, CfD = CFD &c (§. 556); consequenter AfA = AFB + BFC + CFD &c (§. 55 Arithm.) aequalis est areae polygoni regularis (§. 50 Arithm.). Quod erat secundum.

Cum recta Fg ex centro F ad con= VIII
tactum g ducta sit radius, erit ad latus F: 10
ad perpendicularis (§. 50); erit altitudo trianguli aFe (§. 103). Reliqua patent ut ante. Quod erat tertium.

Problema LVII.

400. Invenire aream polygoni regularis. VII
Resolutio, et Demonstratio. F: 107.

1. Latus polygoni AB multiplicetur per dimidium laterum numerum, e: gr: latus hexagoni per 3.
2. Factum porro ducatur in perpendicularem GF ex centro circuli circum= scripti

ſcripti in latus AB demiſſum.
Ita prodit area quaeſita (ſ. F. 3 gr. 401/2)

Ar. gr. IAB = 5° 4'
dimidius Num: lat. 2½
27
 108
Semiperimeter = 135
FG = 29
1215
270
Area Pentagoni 39° 15'

Theorema LXXXIII.

P. VIII. 403. Quadrilatera, et Polygona ſimilia ABCDE, et abcde, diagonales AC, AD, &c. ac in ſimilia triangula ABC, et abc, ACD et acd, ADE, et ade dividuntur, et inter ſe, et totis proportionalia.

F. 111.

Demonſtratio.

Quoniam ABCDE, et abcde ſimilia ſunt, erit B=b, et AB : BC = ab : bc (ſ. def. ſimil.) erge Δ abc ∾ BAC, (ſ. ...), adeoque BCa

bc : ca = BC : CA (§. 183), Habuerat etiam
bc : cd = BC : CD et n + y = n + y (§. 175).
Ergo ca : cd = CA : CD (§. 156 Arith.),
et n = n (§. 91 Arith.) consequenter △ cad
∾ △ CAD, ca : da = CD : DA, et u = u
(§. 183). Habuerat etiam u + s = us, et
cd : de = CD : DE (§. 175). Ergo s = s
(§. 91 Arith.), et da : de = DA : DE (§.
196 Arith.), consequenter △ dea ∾ △ D
EA (§. 183). Quod erat primum.

Quoniam △ ABC ∾ △ abc, et △ D
AC ∾ △ dac et △ DAE ∾ △ dae
demonstrata, erit △ ABC : △ abc =
$CA^2 : ca^2$, △ DAC : △ dac = $CA^2 : ca^2$
= $DA^2 : da^2$, et △ DAE : △ dae = $DA^2 : da^2$
(§. 398), consequenter △ ABC : abc =
△ DCA : △ dca et △ DCA : △ dca = △
DAE : △ dae (§. 101 Arith.) adeoque
etiam △ DEA : △ dea = △ ABC : △ a
bc (§. cit.). Sunt igitur △△ ABC, A
CD, ADE et abc, acd, ade inter se pro-
portionalia.

portionalia. Quod erat ſecundum.

Quoniam denique △ABC : △abc = △DCA : △dca = △DEA : △dea (§. ſecundum hujus); erit △ABC + △DCA + △DEA : △abc + △dca + △dea = △ABC : △abc (§. 187 Arith.). Sed △ABC + △DCA + △DEA = polygono ABCDE, et △abc + △dca + △dea = abcde (§. 86 Arith.). Ergo ABCDE : abcde = △ABC : △abc = △DCA : △dca (§. 168 Arith.), conſequenter ABCDE : △ABC = abcde : △abc, et ABCDE : △DCA = abcde : △dca (§. 173 Arith.). Quod erat tertium.

Corollarium.

404. Cum polygona regularia ſint aequilatera et aequiangula (§. 106), tum etiam ſibi mutuo aequiangula (§. 344); polygona regularia ejuſdem ordinis, veluti omnia pentagona, omnia hexagona & regularia, inter ſe

ſe ſimilia ſunt (§. 175). Polygona igitur regularia ejuſdem ordinis per diagonales in triangula ſimilia dividuntur, et inter ſe, et totis proportionalia.

Scholion.

Quod ſuperius Theorema praeſens ex notione determinata facilius demonſtrari. Nimirum cum figurae AB CDE et abcde ſint ſimiles per hypoth. adeoque anguli A, et a aequales (§. ...) atque praeterea diagonales AC, AD, ab ac, ad ex angulis iiſce aequalibus A, et a ducantur; △△ ABC, et abc, CAD, et cad, D AE et dae eodem modo determinantur (§. 119), conſequenter et inter ſe ſimilia ſunt, et ſimiles partes figurarum exiſtunt (ibid.), eandem adeo ad figuras tanquam totas rationem (§. 170 Arith.), immo eandem inter ſe rationem quam polygona, aut quadrilatera habent (§. 172 Arithmeticae.

Theorema.

Theorema LXXXIV.

VIII 406. Figurae tam regulares, quam simi-
III les irregulares, habent rationem duplica-
tam homologorum laterum.

Demonstratio.

Sint figurae ABCDE et abcde sive regulares, sive irregulares similes, eaeque sive quadrilaterae, sive polygonae quaecunque ejusdem ordinis; erit $ABCDE : abcde = \triangle ABC : \triangle abc = \triangle ACD : \triangle acd = \triangle ADE : \triangle ade$ (§. 403. 404) sed $\triangle ABC : \triangle abc = AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2$, $\triangle ACD : \triangle acd = CD^2 : cd^2$ et $\triangle ADE : ade = DE^2 : de^2 = EA^2 : ea^2$ (§. 395). Ergo $ABCDE : abcde = AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2 = CD^2 : cd^2 = DE^2 : de^2 = EA^2 : ea^2$ (§. 16 Arith.) Q. e. d.

Scholion.

407. Eodem modo ostenditur, figuras rectilineas similes esse in ratione duplicata diagonalium ex angulis aequalibus.

qualibus A, et a ductarum, vel linea-
rum aliarum quarumcunque eodem
modo intra eas determinatarum (§.
405.

Theorema LXXXV.

408. Circuli et figurae similes iisdem
inscriptae, vel circumscriptae sunt in-
ter se, ut quadrata diametrorum.

Demonstratio.

Ponamus tibi duos circulos, et iis
circumscripta quadrata, omnia utro-
que determinantur eodem mo-
do (§. 119 et 351). Sunt ergo figurae u-
traeque inter se similes (§. 118).
Cum adeo utrobique eadem sint,
quae distingui debent (§. 24 Arith.),
quadrata circulis circumscripta ad
suos circulos eandem rationem ha-
bere debent (§. 131 Arith.). Quamo-
brem circuli inter se sunt ut
quadrata

quadrata diametrorum (P. 113 Arith.)
Quod erat unum.

Eodem modo ostenditur, figuras similes circulis inscriptas, vel circumscriptas esse, ut circulos, quibus inscribuntur vel circumscribuntur. Sed circuli sunt, ut quadrata diametrorum, ut demonstratum. Ergo figurae ipsis inscriptae, et circumscriptae similes, sunt ut quadrata diametrorum (P. 167 et.)
Quod erat alterum.

Aliter.

Tabula VIII F: 107. Resolvantur polygona circulis inscripta ABCDE et abcde ex centris F, et f in △△ AFB, BFC, CFD, et afb, bfc, cfd, erit angulus FAB = fab, et FBA = fba &c (P. 344. 347); consequenter △ AFB ∽ △ afb (P. 167). Eodem modo patet esse △ BFC ∽ △ bfc, △ CFD ∽ △ cfd &c. Habemus itaque △ AFB : △ afb = BF² : bf², (~~P. 113 Arith.~~) △ BFC : △

bfc

$bfc = BF^2 : bf^2$ (§. 398). Ergo $ABCDE : abcde = BF^2 : bf^2$ (§. 107 Arith.), conſequenter cum radii BF, et bf ſint ut diametri (§. 39 Geom: et 178 Arith:), polygona ſimilia circulo inſcripta ſunt ut quadrata diametrorum (§. 160 Arith.). Et idem eodem modo oſtenditur de polygonis circulo circumſcriptis, cum triangula ſimilia etiam ſint in ratione duplicata altitudinum (§. 398), altitudines vero triangulorum, in quae reſolvitur polygonum circulo circumſcriptum, ſint radii circulorum (§. 355).

Quodſi jam polygonum circulo inſcriptum tot sumatur laterum, donec ſubtenſa a peripheria magnitudine inaſſignabili differat, polygonum cum circulo idem erit. Unde etiam circuli erunt inter ſe ut diametrorum quadrata. Corolla-

Corollarium.

409. Habens ergo circuli rationem duplicatam diametrorum (§. 404), adeoque, cum radii sint ut diametri (§. 39 Geom: et §. 151 Arith.) ſed radiorum (§. 100. 159 Arith.)

Theorema LXXXVI.

410. Circulus aequalis est triangulo, cujus basis peripheriae, altitudo radio aequalis.

Demonstratio.

T. X. F. 119. Concipiatur peripheria circuli in partes numero infinitas inter se aequales adeoque parvas divisa; arcus infinite exigui ad super chordam cognominem excessus erit quovis dato minor, seu inassignabilis, adeoque vere nullus. Concipiantur porro ex centro c ad extrema arcus infinite parvi ab ducti radii cb, et ca: erit angulus acb infinite parvus, adeoque

a, et b.

a, et b non differunt a recta (§. 140), consequenter si ab sumatur pro basi radius ac erit trianguli abc ~~aequalis~~ altitudo (§. 128). Cum adeo area circuli resolvatur in ejusmodi triangula numero infinita, quorum altitudo communis est radius ac, bases vero junctim sumtae sunt peripheriae circuli aequales, ut demonstravi; erit ille aequalis triangulo cujus basis peripheria, altitudo radius circuli (§. 401). Q. e. d.

Scholion

411. Hac demonstrandi methodo primus usus est Keplerus (a). Eam exemplo ejus excitatus (b) sub nomine Methodi indivisibilium, magis excoluit Cavalerius. Demonstrationem indirectam dedit Archimedes (c) non con=

(a) In nova Stereometria Doliorum vinariorum part. 1. theor. 2. f. 8. a.
(b.) Vide praefat. ad Geometriam indivisibiliu continuorum nova ratione promotp. p. 6. a.
(c) In Libello de circuli dimensione, prop. 1.

non contemnendam, quoniam ipſius demonſtrandi methodo principia methodi infiniteſimalis ligidantur.

Corollarium I.

412. Sunt igitur circuli in ratione compoſita peripheriarum et radiorum (§. 388). Sed iidem ſunt in ratione duplicata radiorum (§. 409). Quare peripheriae ſunt inter ſe ut radii (§. 159 Arithmeticae.)

Corollarium II.

413. Cum adeo ſit, ut peripheria circuli ad ſuum radium, ita peripheria alterius cuiuſcunque ad ſuum (§. 173 Arith.) ratio peripheriae ad radium ſeu diametrum (§. 39 Geom. et §. 181 Arith.) in omnibus circuliſ eadem.

Scholion.

414. Idem etiam hoc modo oſtenditur: cum omneſ circuli inter ſe ſimileſ ſint

sint (§. 134), & quae distingui pos-
sent, ea eadem sunt (§. 14 Arith.) Quo-
niam itaque ratio Peripheri-
arum ad diametros distingui possent
siquidem ea in diversis circulis diver-
sa foret (§. 131 Arith.), ratio in omni-
bus eadem esse debet. Q. e. D.

Theorema LXXXVII.

415. Sector circuli ACD aequalis §. X
est triangulo cujus basis arcus AD, al- §. 133.
titudo radius AC.

Demonstratio.

Eadem est, quae theorematis prae-
cedentis (§. 410).

Theorema LXXXVIII.

416. Polygonum inscriptum minus,
circumscriptum majus est circulo. Si-
militer illius perimeter minor, hujus
autem perimeter major est periphe-
ria circuli.

Demonstra-

Demonstratio.

Tab. VIII. F. 107. Latera AB, BC, CD &c polygoni in-
ſcripti ſunt chordae arcuum cognomines
ſubtendentes (§. 347) Sed chordae
ſunt arcubus minores (§. 191). Ergo
singula polygoni latera AB, BC, CD &c
ſunt singulis arcubus eiſdem reſpon-
dentibus minora, conſequenter polygo-
ni circulo inſcripti perimeter eſt e-
jus peripheria minor (§. 90 Arith.)
Et quoniam chordae totae intra cir-
culum cadunt: area polygoni parti
circuli congruit (§. 9 Arith. et §. 3 Geo.)
adeoque ipſi aequalis eſt (§. 161), con-
ſequenter polygonum inſcriptum cir-
culo minus (§. 10 Arith.) Quod erat
primum, et ſecundum.

Latera polygoni circumſcripti
ab, bc, cd &c tangunt circulum (§. 355)
adeoque tota extra eum cadunt
(§. 47), conſequenter circulus parti
polygoni

polygoni congruit (§. 9 Arith. et §. 35.) Hinc ipsi aequalis (§. 161) hoc est, circulus polygono circumscripto minor est (§. 10 Arith.) Quod erat tertium.

Area polygoni circumscripti est ad aream circuli in ratione composita radii circuli, et perimetrorum (§. 401, 410, 388), consequenter ut factum ex radio in perimetrum polygoni ad factum ex radio in peripheriam circuli (§. 159 Arith.); Ergo illa ad hanc ut illius perimeter ad hujus peripheriam (§. 181 Arith.) Sed polygonum majus circulo ∴ demonstr. Ergo et ejus perimeter major peripheria hujus (§. 149 Arith.) Quod erat quartum.

Theorema LXXXIX.

417. In triangulo rectangulo ABC (§. X. quadratum hypothenusae AC aequale est quadratis laterum AHIB, et BCED simul sumtis. F. 130.

Demonstra-

Demonſtratio.

Ducantur rectae AE et BF (§. 101), itemque BK ipsi CF parallela (§. 158). Quoniam triangulum ACE cum quadrato CEDB super eadem basi, et inter easdem parallelas (§. 336) existit, ejus dimidium eſt (§. 391). Ex eadem ratione △ BCF eſt dimidium parallelogrammi LCFK. Enimvero quia x = o (§. 98. 145) adeoque ~~adeoque~~ x + y = o + y (§. 88 Arith.), BC = CE, et AC = CF (§. 98 Arith.); ideo △ ACE = △ BCF (§. 179), conſequenter BCED = LCFK (§. 93 Arith.). Eodem modo oſtenditur eſſe AHIB = ADKG. Quamobrem BCED + AHIB = LCFK + ALKG (§. 88 Arith.) = ACFG (§. 86 Arith.). Q. e. d.

Scholion.

418. Hoc theorema Pythagoras in-venis

venit: unde Pythagoricum dicitur: Amplissimi sc. Mathesin universam esse usus: ideo ab illius auditoribus Hecatombe, hoc est, centum boum sacrificio, dedentum fertur.

Corollarium I.

419. Quadratum construitur duobus, aut pluribus datis simul sumtis, si 1º. latera duorum AC, et AB jungantur ad angulos rectos (Prag.), 2º. super ducta hypothenusa BC erigatur latus tertii CD perpendiculariter (N. cit.) ducaturque hypothenusa BD. Etenim $BC^2 = AB^2 + AC^2$, et $BD^2 = BC^2 + CD^2$ (P. 417.) Ergo $BD^2 = AB^2 + AC^2 + CD^2$. — T. X. F: 131.

Corollarium II.

420. Quodsi AB fuerit = 1, et AC = 1, erit $CB = \sqrt{2}$. Si porro fiat AD = CB = $\sqrt{2}$; erit $DB = \sqrt{3}$. Si fiat AE = 2; erit $BE = \sqrt{5}$. Si fiat AF = EB = $\sqrt{5}$; — T. X. F: 130.

erit

erit FB = $\sqrt{6}$, et ita porro in infinitum. Omnes adeo radices quadratae surdae sunt ad unitatem ut linea recta ad aliam rectam, consequenter numeri (§. 10 Arith.) itique irrationales (§. 43. 195 Arithmeticae).

Corollarium III.

421. Cum CB sit diagonalis Quadrati (§. 111), erit ea ad latus AB, ut $\sqrt{2}$ ad 1. Sed $\sqrt{2}$ est numerus irrationalis (§. 420) adeoque unitati incommensurabilis (§. 43 Arit.) consequenter diagonalis quadrati est lateri incommensurabilis.

Corollarium IV.

422. ~~CB~~ Dantur adeo quantitates incommensurabiles, hoc est, quarum nulla datur pars aliquota communis (§. 31 Arith.) consequenter rationes irrationales (§. 164 Ar.) Et hinc patet non repugnare, ut hae numeris irrationalibus exprimantur

mantur (§. 419).

Problema LVIII.

423. Datis chorda AB, et radio AC. F. X. invenire chordam arcus dimidii AD. F. 133.

Resolutio, et Demonstratio.

Quoniam radius CD arcum AB bifariam secat in D, per Hypoth: etiam chordam AB bisecat, et ad eam perpendicularis (§. 191), adeoque anguli ad E, recti sunt (§. 155). Quare

1. A quadrato radii AC subtrahatur quadratum chordae dimidiae datae AE; residuum est quadratum ipsius EC (§. 417).
2. Ex hoc residuo extrahatur radix quadrata (§. 169 Arith.) quae erit EC.
3. Haec ex radio DC subducta relinquit DE.
4. Addantur quadrata AE, et ED, summa est quadratum DA (§. 417).

5. Inde

5. Inde ergo si extrahatur (radix § 169 c Arib:/; habetur chorda arcus dimidii AD.

E: gr: sit radius AC = 10000, et AB latus hexagoni: erit AB ibidem 10000 (§ 356) et AE = 5000.

Quare

AC^2 = 100000000	AE^2 = 25000000
AE^2 = 25000000	ED^2 = 1795600
CE = 75000000	DA^2 = 26795600
CE = 8660	DA = 5176
DC = 10000	
DE = 1340.	

Problema LIX.

XI. 424. Dato latere polygoni regularis inscripti AB, invenire latus circumscripti FG.
7:134

Et radio CA

Resolutio, et Demonstratio.

Quoniam FG parallela ipsi AB, et DC chordam AB dividit bifariam (§ 365); erit AE = ½ AB, et CE

$GE : EA = CD : DG$ (§. 168). Quare si ob angulum rectum ad E (§. 191) EC investigetur ut in problemate praecedente; reperietur DG (§. 302 Arith.) cujus duplum est latus polygoni circumscripti FG. Est enim $GE : CD = EA : DG$, et $GE : CD = EB : DF$ (§. 168). Cum adeo sit $EA : DG = EB : DF$ (§. 167 Arith.), et $EA = EB$, demonstrata (?) erit etiam $DG = DF$ (§. 177 Arith.) adeoque $FG = 2\,DG$.

Q. e. i., et d.

E. gr. sit $CD = AB = 10000$, erit $AE = 5000$, et $EC = 8660$ (§. 413), adeoque $DG = 5773$. Hinc $FG = 11546$.

Problema LX.

425. Invenire rationem diametri ad peripheriam.

Resolutio.

1. Quaeratur in continuam bisectionem latera polygonorum inscripto:

inſcriptorum (§. 413), donec perve=niatur ad latus arcum quantumli=bet exiguum ſubtendens.

2. Invento hoc latere, quaeratur porro latus polygoni ſimilis cir=cumſcripti (§. 424).

3. Multiplicetur utrumque nu=merum laterum polygoni, ut ha=beatur perimeter polygoni tam inſcripti, quam circumſcripti (§. 106).

Erit ratio diametri ad periphe=riam circuli major quam ejuſdem ad perimetrum polygoni circum=ſcripti, minor vero, quam ejuſdem ad perimetrum inſcripti (§. 416 Geom. et §. 105 Arith.). Differentia vero inter utramque perimetrum cognita, haud difficulter defini=tur, ratio diametri ad periphe=riam circuli in numeris prope veris.

Sit e. gr.

Sit: e: gr: Radius circuli 1, seu (ut Latera polygonorum per fractiones decimales exprimere liceat) 1.000,000, 000,000,000,000,000,000,000,000. reperietur, continua a quadrato bisectione, Latus polygoni 1,073,741,824 Laterum inscripti vero proxime minus 0.00000000058516723170686387122. circumscripti autem latus vero ibidem proxime majus 0.000000000 58516723170686387384. Hinc perimeter circumscripta 6.283185307 17958649156537 vero proxime major; inscripta autem 6.28318530717958 6450093 vero proxime major. Cum ergo circuli peripheria inter hos limites contineatur; posita diametro 2.00 000000000000000, erit peripheria minor quam 6.2831853071795865, major vero quam 6.2831853071795865. Unde Ratio prope vera diametri ad peripheri:

ripheriam ut 100000000000000000 ad 314159265358979321. Compendia calculi tradit Ludolphus a Ceulen (a)

Scholion I.

416. In quadrando circulo ab omni aevo, quo Geometria exculta, desudarunt ingenia praestantissima: perfectam tamen quadraturam in numeris finitis nemo adhuc dedit, utut nostra praesertim aetate ars inveniendi egregie promota fuerit. Rationem tamen diametri ad peripheriam in numeris prope veris dederunt multi: Archimedes (b) ea fini excogitavit methodum quadrandi circulum per polygona regularia inscripta, et circumscripta, et polygonis 96 laterum usus

invenit

(a) In libro de circulo, et adscriptis conf. fundamenta Arithmetica, et Geometria lib. 6. probl. 1. p. m. 241, et seqq.

(b) In libello de circuli dimensione prop. 2.

invenit rationem diametri ad peri-
pheriam esse ut 7 ad 22 fere. Nimi-
rum si diameter 1, perimeter polygoni
inscripti reperitur $3\frac{10}{71}$; perimeter vero
circumscripti $3\frac{1}{7}$. Ejus vestigiis insi-
stentes posteri rationes propiores in-
vestigarunt. Nemo autem plus operae
impendit Ludolpho a Ceulen (a), qui tan-
dem reperit, posita diametro peripheri-
am esse minorem quam 3.141592653
58979323846264338327950, sed majo-
rem quam idem numerus, cyphra ulti-
ma in unitatem mutata. Enim-
vero quoniam numeri adeo prolixi
praxi parum respondent. In Geome-
tria practica hodie a plerisque assumi-
tur, diametrum esse ad peripheriam
ut 100 ad 314, vel in circulis majoribus
ut 10000 ad 31415: in qua proportione
Ptolemaeus

(a) In Zetematum Geometricorum Epilo-
gismo Zetem: 1. p. 91.

Ptolemaeus, Vieta, Hugenius cum Ludolpho conſentiunt. Hugenius (a) compendioſiorem monſtravit viam, ſed pluribus theorematis nixam, quae in Eiſce: Elementis non demonſtrantur.

Corollarium.

417. Si diameter fuerit 113. erit peripheria 113. 31415 : 10000 (P: 11. Arith:) hoc eſt 355 quam proxime.

Scholion II.

418. Haec proportio, quam Adrianus Metius tradit (b) a parente suo inventam, et demonſtratam (c), inter omnes, quae parvis numeris exprimuntur, accuratiſsima. Ludolfi enim numeri

(a) In inventis de circuli magnitudine prop: 10. p: 15, et prop: 20. p: 40.
(b) In Geometria practica part: 1. c: 10 (S: 3) p: m: 89.
(c) In Libello adverſus quadraturam circuli Simonis a Quercu conſcripto.

numerum 355 septem cyphras ad obtinendas fractiones decimales auctum per 113 dividas; quobuscum proportione Ludolphina collatus ostendes eam ne quidem $\frac{3}{10000000}$ a vera differre.

Problema LXI.

429. Dato diametro circuli invenire peripheriam et aream ejus; et data peripheria diametrum.

Resolutio, et Demonstratio.

1. Cum detur ratio diametri ad peripheriam (P: 426. 427); una data invenietur altera (P: 302 Arit:).
2. Peripheria ducta in quartam diametri partem, habebitur area circuli (P: 410. 391).

E: gr: Sit diameter 56: erit

100 — 314 — 56 Periphe: 17584'''

56 ¼ Diam: 1400

1884 7033600

1570 17584

Perip: 175'8''4''' Area 2461'76''00''' quad

Corollarium I.

430. Si diameter 100; peripheria 314 (§. 426), adeoque area circuli 7850 (§. 429). Est vero quadratum diametri 10000 (§. 370): ergo hoc ad aream circuli ut 10000 ad 7850, hoc est, ut 1000 ad 785 (§. 181 Arith.) quam proxime.

Corollarium II.

431. Similiter si diameter 113, peripheria 355 (§. 427) adeoque area circuli $10028\frac{3}{4}$ (§. 429). Est vero quadratum diametri 12769 (§. 370). Ergo hoc ad illam ut 12769 ad $10028\frac{3}{4}$, hoc est, ut 51076 ad 40115 (§. 178 Arith.) consequenter (dividendo per 113) ut 452 ad 355 (§. 181 Arith.), quae Metiana proportio priori accuratior.

Corollarium III.

432. Area igitur circuli etiam invenitur, si ad 1000, 785 et quadratum diametri; vel ad 452, 355 et quadratum diametri numerus quartus proportionalis quaeratur (§. 302 Arith.). Sit e. gr.

Sit: e: gr: diameter 560," erit quadratum ejus 31°36'00". Quare.

$$1000 - 31.^{0}36'00'' - 785$$

$$\begin{array}{r} 785 \\ \hline 1568000 \\ 25088 \\ 21952 \\ \hline 24^{0}61'76'' \end{array}$$ Area Circuli.

Corollarium IV.

433. Si area circuli minoris **GEHF** sub=(F: X) trahatur ex area majoris concentrici **AD**(F: 135) **BC**, relinquitur annulus **ADBCGEHF**.

Problema LXII.

434. Data area circuli, invenire diame=trum.

Resolutio.

1. Quaeratur ad 785, 1000, et aream circuli datam 246176 numerus quartus proportionalis 313600 (P. 302 cit.), qui est quadratum diametri (P. 430).
2. Inde extrahatur radix quadrata 560 (P. 269 cit.), quae est diameter (P.

236

136 Arith; et P: 370 Geom:)

Problema LXIII.

F: X. 435. Dato radio circuli AC una cum
F: 133. ratione arcus AB ad peripheriam inve=
nire aream Sectoris ACB.

Resolutio.

1. Quaeratur ad 100, 314, et radium
AC numerus quartus proportionalis
(P: 301 Arith:): qui est semiperi=
pheria (P: 436 Geom: et P: 181 Arit.)
2. Quaeratur porro ad 180° arcum da=
tum AB, et semiperipheriam inven=
tam numerus quartus proportio=
nalis (P: 301 Arith:): ut habeatur ar=
cus AB in eadem mensura, in qua
radius AC datur.
3. Tandem arcus AB ducatur in semira=
dium.

Factum exprimit aream Sectoris (P:
415. 391).

E: gr:

E. gr: Sit radius 6', arcus 60.°

100 — 314 — 600'''

600

Semiperiph: 1884|00

180 — 1884 — 60

60/ 3 —— 1

628''' = AB.

300 = ½ AC.

Area 18'84''|00| = ACB.

Problema LXIV.

436. Datis altitudine segmenti DE, et F: X. dimidia basi EA, invenire aream ejus. F: 133.

Resolutio.

1. Quaeratur diameter (F: 328).
2. Describatur circulus (F: 131), et in eo applicetur basis segmenti AB.
3. Ducantur radii AC, et BC, et ope instrumenti transportatorii investigetur numerus graduum arcus ADB.
4. Dato jam radio AC una cum arcu ADB ad peripheriam ratione, investigetur area sectoris ACB, et
5. Ex chorda AB atque altitudinis segmenti.

segmenti **DE** complemento ad radium **EC**, area trianguli **ACB** (§. 391).
6. Hoc denique ex illo aufertur; residuum erit segmentum **ADEBA**.

E. gr. Sit **AB** = 600‴ **DE** = 80‴; erit **DF** = 1205‴ (§. 313), arcus **AB** = 60° (§. 152). Ergo area Sectoris **ADBC** = 18′ 84″ (§. 435. Jam **EC** = 522 $\frac{1}{2}$‴ **AE** = 300‴ Quare △ **ACB** = 156756‴ consequenter Segmentum **AEBDA** = 31650‴.

Corollarium.

437. Quodsi Segmentum majus **BFA** quaeratur, triangulum **BCA** sectori **BFACB** addendum.

Scholion.

438. Ne pro invenienda area sectoris atque Segmenti perpetuam investigare opus sit arcuum gradus, atque scrupula tam prima, quam secunda ejusmodi particulis expressa in tabula subsequente exibere placet,

qualis

1	872	1	14
2	1745	2	29
3	2617	3	43
4	3490	4	58
5	4363	5	72
6	5235	6	87
7	6108	7	101
8	6981	8	116
9	7853	9	130
10	8726	10	145
20	17453	20	290
30	26179	30	436
40	34906	40	581
50	43633	50	727
60	52359	Secu:	Part: per:
70	61086	2	0
80	69813	3	1/2
90	78539	4	1/2
100	87266	5	1
110	95993	6	1
120	104719	7	1 1/2
130	113446	8	1 1/2
140	122173	9	2
150	130899	10	2
160	139626	20	4
170	148353	30	7
180	157079	40	9
360	314159	50	12
Grad:	Part: per:	Min:	Part: per:

qualium diameter eſt 100000. Conſtructio Tabulae intelligitur ex reſolutione problematis 61 (T. 435): uſus talis eſt: Si ergo ut in caſu problematis erat diameter 1200‴ arcus 60°. cum 60 gradibus in tabula reſpondeant 52359 particulae diametri, inferatur:

100000 — 52359 — 1200

1200

10471800

52359

628|30800

Eſt ergo arcus 628‴, ut ſupra (T. cit.) eundem reperimus.

Problema LXV.

T. XI. 439. Parallelogrammum ABEC
F. 136. ex dato puncto D in duas partes aequales dividere.

Reſolutio

Fiat EF = AD, et ducatur recta DF: erit ADFC = DBEF.

Demonſtra:

Demonstratio.

Ducatur diagonalis **AE**: erit o = x (§: 156), et ob parallelas **AB**, et **EC** (§: 102) y = u (§: 133). Sed **AD** = = **FE** per constructionem. Ergo Δ **ADG** = Δ **FGE** (§: 152). Est vero Δ **ACE** = Δ **AEB** (§: 337). Quare **ACFG** = **DBEG** (§: 91 Arith:) consequenter **ADFC** = **DBEF**. (§: 88 Arith:) Q. e. d.

Problema LXVI.

440. Parallelogrammum atque triangulum in partes quotcunque aequales dividere. §: 137 138.

Resolutio.

1. Dividatur basis **CD** in tot partes aequales, in quot figura dividenda (§: 274.).
2. In parallelogrammo ducantur rectae 11, 22; in triangulo A1, A2.

Demonstratio

Demonſtratio.

Quoniam parallelogramma A11C 1111, 12BD2 inter eaſdem parallelas A B, et CD exiſtunt (P:101); eandem altitudinem habent (P:117. 118) Sunt itaque in baſium ratione (P:389), conſequenter ob C1 = 12 = 2D, per conſtructionem aequales. Quod erat unum.

Cum ex uno puncto A ad eandem rectam CD perpendicularis nonniſi unica duci poſſit (P:113); triangula AC1, 1A2, 2AD eandem altitudinem (P:118), adeoque baſium rationem habent (P:389). Sed baſes aequales ſunt per conſtructionem. Ergo et triangula. Quod erat alterum.

Problema LXVII.

T:XI. 441. Figuram regularem quamcunque
F:139. ABCDE in partes aequales dividere.

Reſolutio

Reſolutio.

1. Quaeratur area figurae (§. 400) et dividatur in tot partes aequales, in quot figura dividi debet, e. gr. in 3.
2. Area partis in noſtro caſu tertiae, ulterius dividatur bifariam.
3. Area trianguli AED ſubtrahatur a parte tertia, et reſiduum dividatur per $\frac{1}{2}$ AD; erit quotus altitudo trianguli AID priori AED addendum, ut AEDI ſit pars tertia figurae (§. 394).
4. Quare intervallo cujus altitudinis ducatur parallela ipſi AD (§. 158), quae ſecabit latus AB in I: quo puncto dato, rectam DI ducere licet, tertiam partem figurae AIDE abſcindentem.
5. Pars tertia dimidia, ſive ſexta totius figurae dividatur per $\frac{1}{2}$ DI, quotus

quobus erit altitudo trianguli IKD
sextam figurae partem constituen=
tis (§. 394.).

6. Intervallo igitur hujus altitudi=
nis agatur ipsi ID parallela, ut
habeatur punctum K (§. 158).

7. Dividatur quoque dimidia pars
tertia figurae per $\frac{1}{12}$ KD, ut habea=
tur altitudo trianguli KLD se=
xtae ibidem parti figurae aequa=
lis (§. 394).

8. Quare hujus intervallo denuo aga=
tur ipsi KD parallela (§. 158) ut
punctum L determinetur, ducatur=
que recta KL, quae partem figurae ter=
tiam KIDL resecabit.

9. Si figura in plures quam tres par=
tes resolvenda, eodem modo ul=
terius procedendum.

E. gr. Sit AD = 516'', AC = 580'', EH
= 154'', DG = 315'', BF = 375''; erit AED
=

= 39732'' ADC = 91350, et ABC = 108750 (P: 392) adeoque area figurae 239832 (P: 400); ejus pars tertia 79944; pars sexta 39972.

Pars III = 79944
AED = 39732

AID = 40212 (1554 seu 156 fere = IA

$\frac{1}{2}$ AD = 258) 258

1442
1290

152

Pars VI = 39972 (151'' = KN.
$\frac{1}{2}$ DI = 264) 264

1357
1320

372
264

108

Pars VI = 39972 (139'' = LO
$\frac{1}{2}$ DK = 287) 287

1127
861

2662
2583

79.

Scholion.

Scholion I.

442. Si **AED** majus tertia v:gr: parte figurae; ipsam ab illo subtrahi necesse est, et residuum eius triangulum a triangulo **AED** auferendum, ut tertiae parti figurae aequalis evadat. Saepe etiam consultum est, ut prima pars **AEDI** in duo triangula, ubi caeterae determinentur.

Scholion II.

443. Ubi in charta divisio absoluta; in campo puncta **I, K, L,** quantitatem rectarum **AI, IK,** et **DL** facile determinantur (P:126).

Finis Partis Prioris.

Index Capitum.

Caput ~ I ~
De principiis Geometriae. Pag.ª 1.
Caput ~ II ~
De Propositionibus quibusdam fundamentalibus. P. 35.
Caput ~ III ~.
De Linearum, et Triangulorum Symptomatis. P. 72.
Caput ~ IV ~.
De Circuli Symptomatis. P. 159
Caput ~ V ~
De Figurarum descriptione. P. 189
Caput ~ VI ~
De Figurarum Dimensione, ac divisione P. 242

Finis ~ Finis. ~

Elementa Geometriae Solidae.

Caput Primum

De principiis Geometriae Solidae.

Definitio ~ I ~

444. Solidum sive corpus est magnitudo tribus dimensionibus praedita, seu extensum in Longitudinem, Latitudinem, atque profunditatem.

Definitio ~ II ~.

Tabula XI. F: 141.

445. Angulus solidus B est plurium quam duarum Linearum BA, BC, BF in eodem puncto B concurrentium, nec in eodem plano constitutarum ad omnes inclinatio.

Corollarium I ~

446. Ergo angulus solidus B pluribus quam duobus planis in eodem plano non constitutis ABF, FBC, CBA conti=

continetur.

Corollarium II.

447. Quoniam adeo tres minimum lineae ad angulum solidum constituendum requiruntur (§. 445); tres minimum anguli plani ad solidum constituendum necessarii.

Scholion I.

448. Unde etiam angulus solidus definitur, quod sit is, qui pluribus quam duobus planis angulis in eodem plano non consistentibus, ad idem tamen punctum constitutis continetur.

Corollarium III.

449. Ut anguli solidi sint aequales, angulis planis, et multitudine, et magnitudine aequalibus ac eodem ordine dispositis contineri debent. (§. 15. Arithm.)

Scholion II.

450. Suppono scilicet, ut anguli solidi salva quantitate sibi mutuo substitui possint.

poſsint, eos intra se invicem positos congru-
ere debere: quemadmodum etiam angu-
li solidi aequales vulgo definiuntur,
quod intra se invicem positi congruant.

Corollarium IV.

451. Cum anguli solidi distingui neque-
ant nisi per planos, quibus continen-
tur (§. 448.), ubi plani et numero, et
magnitudine aequales, ac eodem or-
dine dispositi fuerint, ea coincidunt
per quae a se invicem distingui de-
bent. Sunt ergo similes (§. 24 Arithm.),
consequenter anguli solidi similes
sunt aequales, et contra (§. 449.).

Corollarium V.

452. Si anguli plani in eodem puncto
concurrentes conficiant summam 360
gradium; planum circuli sternunt
(§. 41. 59), adeoque solidum angulum
non constituunt (§. 440.). Quare sum-
ma eorum, qui ultra solidum non as-
surgunt

surgant, quatuor (rectis seu = 360° (§. 144) minor esse debet.

Definitio III.

453. Corpus regulare est solidum planis regularibus, et inter se aequalibus terminatum: Reliqua corpora dicuntur irregularia.

Scholion.

454. Corpora regularia dicuntur etiam Platonica, propterea quod Plato in Timaeo corpora, quae statuit simplicia, coelum puta, ignem, aerem, aquam, atque terram cum iisdem comparat.

Corollarium.

455. Cum quilibet angulus corporis regularis angulis planis, et numero, et magnitudine aequalibus contineatur (§. 453), omnes anguli corporis cujuslibet regularis, aequales sunt. (§. 449).

Definitio IV.

456. Si figura rectilinea ACB juxta ductum

P:XI. ductum Lineae rectae AE modo sibi sem=
P:140. per parallelo feratur, Priſma deorſum
ABC.DFEA deſcribit: et quidem rectum,
si Linea directrix AE fuerit ad planum
deſcribens perpendicularis; obliquum vero,
si ea ad idem fuerit obliqua. In ſpecie
Priſma dicitur triangulare, ſive trigo=
num, si planum deſcribens fuerit tri=
angulum; quadrangulare, si fuerit fi=
gura quadrilatera, et ita porro.

Corollarium I.

457. Quodlibet adeo priſma habet duas
baſes oppoſitas ABC, et DEF aequales, et
circumcirca terminatur tot parallelo=
grammis, quot baſis latera habet.
Eſt enim AC ipſi ED parallela, atque
aequalis per hypotheſin. Ergo et AE pa=
rallela ipſi CD (P:157), conſequenter
ACDE eſt parallelogrammum (P:101).
Et idem eodem modo de ceteris pla=
nis lateralibus oſtenditur.

Corolla=

Corollarium II.

458. Plana sectionum prismatis basi ACB parallele factarum sunt inter se aequalia. Aequantur enim plano describenti ACB (§. 456 Geom.; et §. 81 Arith.), ergo et inter se aequalia sunt (§. 81 Arithm.). T. XI. F. 141.

Definitio V.

459. Si planum describens ABCD fuerit quadratum, et Linea dirigens AE lateri ejus AB aequalis, atque angulus BAE rectus; Cubus describitur.

Corollarium I.

460. Cubus terminatur sex quadratis inter se aequalibus: est enim ABCD = EF GH (§. 459 Geom. et 81 Arith.). Cumque ex eadem ratione AB et EF sint inter se aequales, et parallelae, et BA ad AE perpendicularis, erit etiam AE ad EF perpendicularis (§. 430), consequenter ABFE quadratum (§. 338), ipsi ABCD aequale (§.

P: 374). Eodem modo oſtendibur, reliqua plana terminantia eſse quadrata ipſi ABCD aequalia.

Corollarium II.

461. Plana ſectionum baſi parallele factarum ſunt quadrata ipſi aequalia (P. 459 Geom:, et P. 86 Arit:) conſequenter etiam aequalia inter ſe (P. 87 Arithmeticae.)

Definitio VI.

F: XI. 462. Si planum deſcribens IKLM fuerit parallelogrammum, Parallelepipedum deſcribitur.
F: 142

Corollarium I.

463. Plana ſectionum baſi parallele factarum ſunt parallelogramma ipſi aequalia (P. 462, Geom:, et 86 Arit:), adeoque, et aequalia inter ſe (P. 87 Arit).

Corollarium II.

464. Cum LM et NO ſint aequales, et inter ſe parallelae (P. 462 Geom:, et 81 Arit:) etiam

etiam MO, et LN aequales sunt; et pa-
rallelae (§. 151), consequenter LMNO
parallelogrammum (§. 102). Eodem mo-
do ostenditur, plana terminantia re-
liqua esse parallelogramma. Termi-
natur adeo parallelepipedum sex paral-
lelogrammis, quorum bina opposita in-
ter se aequalia sunt.

Definitio VII.

465. Si circulus AB juxta quietum re- T: XI.
ctae AD motu sibi semper parallelo F: 148.
deorsum feratur, Cylindrus describitur;
rectus quidem, si recta CF centra basi-
um C et F jungens, quae axis dicitur,
fuerit ad diametrum DE perpendicu-
laris; scalenus vero, si ad angulos obli-
quos eidem insistat. Quod si paralle-
logrammum rectangulum CBEF cir-
ca latus unum CF gyretur; Cylin-
drum describit rectum.

Corolla-

Corollarium

466. Sunt ergo non modo bases Cylindri AB, et DE aequales; verum etiam sectiones basibus parallelae sunt circuli iisdem, et inter se aequales.

Definitio VIII.

F. XI. 144. 467. Si recta quaedam KM in peripheria circuli NM ita moveat, ut constanter inhaereat puncto fixo K, describetur Conus NKM. Recta ex puncto K qui vertex Coni dicitur, ad centrum basis L ducta, dicitur axis Coni: qui si ad diametrum circuli NM fuerit perpendicularis, Conus rectus est: si vero ad angulos obliquos eidem insistat, scalenus. Linea describens KM, seu recta ex vertice in peripheriam basis ducta vocatur Latus Coni. Possumus quoque Coni genesin ita concipere, ut circulus infinite parvus, dum motu sibi semper parallelo ita deorsum fertur

ut

ut centrum continuo sit in axe KL, radi: us PQ axi KP proportionaliter continuo augeatur. Quodsi triangulum rectan= gulum KLM circa rectam KL gyretur, Conus describitur rectus.

Corollarium.

468. Quodsi PQ ipsi LM parallela; per ultimam coni genesin erit KP: KL = PQ: LM. Quare cum PQ et LM sint radii circulorum sibi invicem paralle= lorum; planum sectionis basi coni parallelo factae circulus est eadem minor.

Scholion.

469. Ex genesi ultima coni apparet, in definitionibus geometricis geneti= cis tanquam entium imaginariorum admitti etiam posse miraculosa. Etsi quoniam in cono obliquo latus conicum eiusdem longitudinis in quovis peri= pheriae puncto; habet lineam descri=

bentem

tentum KM, quae alteri sui extremo peri-
pheriae NM constanter adhaeret, per
punctum fixum K aliqua sui parte
nunc deorsum, nunc sursum moveri
debet.

Definitio IX.

T:XI. 470. Si semicirculus K juxta diame-
F:145. trum AB gyretur; Sphaera describitur,
diciturque diameter circuli AB etiam
diameter, atque Axis Sphaerae, centrum
C etiam Centrum Sphaerae.

Corollarium.

471. Omnes ergo rectae ex sphaerae su-
perficie in centrum ductae sunt in-
ter se aequales (§. 40).

Definitio X.

T:XI. 472. Pyramis est solidum termina-
F:146. tum circumcirca tot triangulis A
CD, CDB et BDA in uno puncto
D coeuntibus, quot basis ABC latera
habet. Dicitur autem triangularis, qua-
drangu-

drangularis, quinquangularis &c. si basis triangularis, quadrangularis, quinquangularis &c.

Corollarium I.

473. Si ac, cb, ba lateribus AC, CB, BA basi ACB parallelae ducantur; erit $DC : Dc = CA : ca = CB : cb$ (P. 468), adeoque $CA : ca = CB : cb$ (P. 161 Arith.), consequenter cum eodem modo ostendi possit esse $CA : ca = AB : ab$, erit triangulum acb simile triangulo ACB (P. 207). Quare si pyramis triangularis ACDB secatur plano basi parallelo; planum istud basi simile erit.

Corollarium II.

474. Quoniam pyramis multangularis in tot triangulares resolvi potest, quot sunt latera basis demptis duobus, nempe quadrangularis in duas, quinquangularis in tres &c. si pyramis multangularis plano basi parallelo secatur, constabit

tibi d ex triangulis, quae singula singu=
lis similia sunt, in quae reſolvitur baſis
(§:473), conſequenter cum vi demonſtra=
tionis primae problematis 47 (§:363)
pateat, ſimiles eſſe figuras rectilineas
quaſcunque, quae ex triangulis simili=
bus eodem ordine inter ſe junctis com=
ponuntur, in quavis pyramide planum
sectionis baſi parallelum eſt figura
baſi similis.

Definitio XI.

T:XI. 475. Tetraedrum eſt solidum quatuor;
F:147. Octaedrum eſt solidum octo; Icoſae=
T:XII. drum eſt solidum viginti triangulis
F:148 aequilateris et aequalibus comprehen=
149. ſum; Dodecaedrum vero solidum duo=
150. decim pentagonis regularibus et
aequalibus contentum.

Definitio XII.

T:XII. 476. Inclinatio plani KEGL ad pla=
F:151. num ACDB eſt angulus HFI, quem
effi=

efficiunt rectae HF, et FI in puncto F ad lineam Sectionis EG perpendiculares.

Definitio XIII.

477. Mensura solidi est cubus, cujus latus perticae unius, diciturque Pertica cubica. Haec dividitur in Pedes, Digitos et cubicos, hoc est, in cubos quorum latus pedem digitum et adaequat.

Caput II

Caput II

De Sectione et Situ Planorum

Theorema I.

Tab. XIV Fig. 115

478. Rectae Lineae pars quaedam AB non est in subjecto plano DE, pars vero BC in sublimi.

Demonstratio.

Sit enim, si fieri possit, pars lineae rectae AB in plano DE, pars vero altera BC in sublimi. Cum linea recta terminata utrinque produci possit (P. 21), producatur AB in F: erit ergo AB pars rectae AF. Sed eadem AB est pars rectae ABC ex hypothesi. Punctum igitur rectam describens in B mutat directionem, cum et versus F, et versus C progredi valeat, ubi ad B pervenit: quod cum sit absurdum (P. 19), rectae lineae quaedam pars AB non po=

poteſt eſse in ſubjecto plano DF; pars vero quaedam BG in sublimi. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

479. Duae igitur rectae ADEB, et CDEF segmentum commune DE ha= bere nequeunt (§. 478), conſequenter duae rectae AB et CF se mutuo interſecant niſi in uno puncto D. §. XIV F. 176

Corollarium II.

480. Cumque pars rectae AD eſset in subjecto plano, pars vero BD in sublimi, ut trianguli ABC pars A DE eſset in subjecto plano, pars ve= ro DBCE in sublimi; triangulum ABC erit in eodem plano. §. XIV F. 177.

Corollarium III.

481. Et quoniam rectarum BE et DC se mutuo secantium in A partes AB et AC sunt crura trian= guli ABC; erunt eadem in eodem plano §. XIV F. 178

plano (§. 480). Sed in eodem plano
eſt EA, in quo eſt AB, et AD in eodem
eſt, in quo eſt AG (§. 478). Ergo lineae
ſe mutuo ſecantes EB, et DG in eo=
dem ſunt plano.

Theorema II.

E

§. XIV 481. Si duo plana ABCD et FHG ſe
§. 179 mutuo ſecant; erit communis ſectio re=
cta IK.

Demonſtratio.

Quoniam rectae AB et EF ſe mu=
tuo non interſecant, niſi in puncto I,
nec rectae DC, et GH niſi in puncto
K (§. 479); ſi communis planorum
ſectio non eſt recta unica, ſed aliquod
planum, termini illius plani in
punctis I et K coire debent. Ducan=
tur ergo in plano EFHG recta ABC
D recta IMK, quod fieri poſſe patet,
ſi ſectio communis planorum AB
CD, et EFHG non eſt recta unica
IK

IK, ubi planum sectionis lineis curvis in punctis I et K documentibus terminari sumas (§.191). Duae igitur rectae ILK et IMK, cum earum extrema in I et K coincidant, totae in punctis omnibus coincidere debent (§.170), conſequenter communis sectio eſſe nequit niſi recta jungens puncta I et K. Q.e.d.

Theorema III.

T. XIV

483. Si duae rectae AB et CD fuerint in eodem plano, recta EF easse- F. 180
cans in G et H erit in eodem plano.

Demonſtratio.

Secet planum aliud planum datum, in quo poſitae sunt rectae AB et CD, in punctis G et H; recta tranſiens per G et H eſt communis sectio planorum (§.482). Sed eadem eſt pars lineae EF (§.170), quae duas AB et CD secat per hypoth. Recta igitur

EF

EF esse in eodem plano in quo ponun-
tur duae AB et CD. Q. e. d.

Theorema IV.

T. XIV. 484. Si recta IE fuerit perpendicu-
F. 181. laris ad rectam KL in plano AB CD ductam; erit ea perpendicularis ad rectas omnes MN, OP et quae per punctum E ducuntur.

Demonstratio

Concipiamus enim rectam KL, cui IE perpendiculariter insistit, circa punctum E moveri, donec ipsi MN immineat. Quoniam recta KL cum recta MN coincidit (§. 30), IE vero situm ad eandem non mutat: erit ipsa IE etiam perpendicularis ad MN. Eodem modo patet, eandem rectam IE etiam perpendicularem esse debere ad rectam OP, et quamcunque aliam per punctum E in plano AB CD ductam

ctam. Q: e: d:

Corollarium

485. Recta igitur IE, ad rectam. KL in plano ABCD perpendicularis omnibus rectis per punctum E in eodem plano ductis ad angulos rectos insistit (§. 78.).

Scholion

486. Hinc linea recta IE ad planum ABCD perpendicularis definitur, quod ad rectas omnes lineas in plano ductas, a quibus illa tangitur, angulos rectos facit.

Theorema V. D: XIV

487. Si recta IE fuerit ad planum ABCD perpendicularis, et ex E tanquam centro in eodem plano descriptus sit circulus, erunt rectae IG, IF &c. ab eodem puncto sublimi ad peripheriam ductae inter se aequales. F: 182

Demon=

Demonſtratio.

Ducantur ex centro E, ad puncta peripheriae F, G, et Radii EF, EG; erit EF = EG (P. 40), cumque anguli FEI, et GEI ſint recti (P. 485), etiam FEI = GEI (P. 145). Quare cum porro ſit EI = EI; erit FI = GI (P. 179). Q. e. d.

Theorema VI.

T. XIV. 488. Ex eodem puncto E ad planum
F. 181. ABCD nonniſi unica perpendicularis EI duci poteſt.

Demonſtratio.

Ducatur, ſi fieri poteſt, adhuc alia EQ, et per punctum E in plano recta OP: erit cum EQ, tum EI ad eandem rectam OP perpendicularis (P. 486): quod cum ſit abſurdum (P. a13), ex eodem puncto E nonniſi unica perpendicularis ad planum EI erigi poteſt. Q. e. d.

Theorema

Theorema VII.

489. A b eodem puncto I in sublimi da- T:XIV
to ad idem plano ABCD perpendicu= F: 182
laris nonniſi unica IE demitti po=
teſt.

Demonſtratio.

Demittatur enim, ſi fieri poteſt,
adhuc alia IG. Jungantur puncta
E, et G in plano recta EG; erit IEG
triangulum in eodem plano (§: 480).
Duo igitur in triangulo ad baſin an=
guli E, et G recti sunt (§: 486.) quod
cum ſit abſurdum (§: 118), a pun=
cto I ad planum ABCD nonniſi
unica perpendicularis demitti po
teſt. Q. e. d.

Theorema VIII.

T:XIV.
490. Linea perpendicularis IE eſt bre= F: 180.
viſsima, quae a puncto extra plano
dato ad idem duci poteſt.

Demon=

Ducatur enim recta adhuc alia IG, et jungantur puncta E, et G in plano recta EG; erit triangulum IGE in eodem plano (§: 480) et angulus ad E rectus (§: 480). Est igitur IE < IG (§: 110). Q: e: d:

Theorema IX.

§: XIV. 491. Si recta LE, duabus rectis FE, et §: 183. HE, vel pluribus FE, HE, IE, in eodem puncto E concurrentibus perpendiculariter insistat; erunt duae illae rectae FE, et HE, vel plures FE, HE, et IE in eodem plano ABCD.

Demonstratio.

Sit enim, si fieri potest, recta EH in plano ABCD, et EF in plano LE GK. Erit ergo linea EG cum EH in eodem plano, consequenter LE perpendicularis ad EH insistet ipsi EG ad angulum rectum (§: 455). Sed

Sed cum L.E. etiam ipſi E.F. sit perpen-
dicularis per hypoth: erit etiam angulus
L.E.F. rectus (T:181), conſequenter angulus
L.E.F. ipſi L.E.G aequalis (T:145), pars
nempe toti (T:9. c. Arith:): quod cum sit
abſurdum (T:54. c. Arith:) rectae F.E,
et H.E, quibus recta L.E, in puncto E.
perpendiculariter inſiſtit, in eodem
sunt plano ABCD. Quod erat unum.

Si plures fuerint rectae E.F, E.H,
E.I &c quibus recta E.L perpendicula-
riter inſiſtit; patet ex demonſtratis, ip-
ſas rectas E.I, et E.H, itemque E.H, et
E.F in eodem plano ABCD. Sunt igi-
tur et rectae E.I, et E.F, conſequenter
omnes rectae E.I, E.H, et E.F in eodem
plano ABCD. Quod erat alterum.

Theorema X.

491. Lineae rectae GE, et HF eidem T:XV.
plano ABCD perpendiculares sunt F:184.
inter se parallelae; et si una paralle-
larum

larum GE, et HF fuerint ad planum
perpendicularis, etiam ad idem perpen-
dicularis erit altera.

Demonstratio.

Ducatur recta EF, et cum GE per-
pendicularis sit ad planum ABCD (ex
hypoth.) insistet ea rectae EL in plano
ipso ductae ad angulos rectos; erit ergo
etiam GE perpendicularis ad EF (§.
484). Sumatur EL aequalis EF, et
moveatur GE juxta ductum rectae EL,
donec in L perveniat, ita ut rectae EL
semper insistat ad angulum rectum;
erit LI perpendicularis ad EL (§. 78),
et ipsi HF parallela (§. 256). Moveatur
recta EL cum sua perpendiculari LI
donec ipsi EF congruat (§. 168), conse-
quenter punctum L in F cadat (§. 3).
Quoniam LI rectae EF est perpendicu-
laris (demonstrata); ad idem vero pun-
ctum F ejusdem rectae EF non nisi uni-
ca

ea perpendicularis recta esse, ostendit (§. 113); Etiam recta LI cadet in rectam EH atque adeo HF erit ad EF perpendicularis, consequenter HF et GE inter se parallelae. Q. e. unum.

Sint jam GE, et HF inter se parallelae et GA ad planum perpendicularis. Patet, ut ante, si ponatur perpendicularis ad rectam EL, eam etiam perpendicularem esse debere ad EF. Ad eandem EF igitur etiam perpendicularis est HF (§. 230), consequenter HF perpendicularis ad planum ABCD (§. 484. 486. Q. e. alt.

Corollarium.

493. Rectae igitur omnes ad rectam EF in plano GEFH perpendiculares etiam ad planum ABDC perpendiculares sunt.

Scholion.

494. Hinc Euclides planum definit ad planum rectum, sive perpendicularem

cum omnes rectae lineae, quae communi planorum ABDC et GEFH sectioni EF perpendiculares ducuntur in planorum uno GEFH, rectae sunt alteri plano ABDC.

Theorema XI.

T.XV. F:185. 495. Rectae AB et EF, quae sunt eidem rectae CD parallelae, non tamen in eodem cum ipsa plano, sunt inter se parallelae.

Demonstratio.

Ducatur in plano parallelarum AB et CD recta GH ad AB perpendicularis, et ex H perpendicularis HI ad EF in plano parallelarum CD et EF. Junguntur puncta G et I recta GI; erit triangulum GHI in eodem plano (§. 480). Quoniam AG perpendicularis ad GH et EI perpendicularis ad HI per constru: erunt etiam AG, et EI perpendiculares ad GI (§. 484) con:

sequenter

conſequenter inter ſe parallelae (§. 451).
Quod erat demonſtrandum.

Theorema XII. §. XIII.

496. Si duae rectae AC, et CB fuerint parallelae duabus rectis DF et FE, etiam ſi non ſint in eodem plano, angulos quos comprehendunt aequales ſunt. §. 16.

Demonſtratio.

Fiat CB = FE, et CA = FD: quoniam CB parallela ipſi FE, et CA parallela ipſi FD (hypoth.); erit BE ipſi CF et AD eidem CF parallela, et aequalis (§. 451), conſequenter BE parallela (§. 495) et aequalis (§. 87 Arith.) ipſi AD, ac ideo AB parallela, et aequalis ipſi DE (§. 451). Eſt igitur angulus DFE = ACB (§. 104). Q. e. d.

Theorema XIII. §. XV.

497. Si recta IK duobus planis ABCD et EFGH fuerit perpendicularis, erunt plana inter ſe parallela. §. 18.

Demon=

Demonſtratio.

Ducatur recta IL in plano ABCD, et erigatur ML ad eam perpendicularis, quae plano EFGH in M occurrit, cumque angulus I rectus ſit per hyp: ad IK parallela eſt (§: 491), conſequenter plano EFGH ad angulos rectos inſiſtit (§: 492. Quamobrem ſi puncta M et K jungantur recta MK, erit angulus K rectus (§: 485), conſequenter LM = IK (§: 138). Cum eodem modo demonſtretur rectam ex quovis alio puncto plani ABCD ductam ipſi IK parallelam eidem aequalem eſſe; plana ABCD et EFGH ubivis a ſe invicem eodem intervallo diſtare (§: 115) patet. Sunt igitur inter ſe parallela.

Scholion

498. Nimirum planum ABCD alteri EFGH dicitur parallelum, perinde ac recta alteri rectae parallela eſt (§: 81)

(§:81), si ubivis eandem, a se eadem distantiam servat.

Theorema XIV. T: XV. F: 18

499. Si planum ABCD secet duo plana parallela EFGH et IKLM, erunt sectiones AD et BC inter se parallelae.

Demonstratio

Ponamus enim sectiones AD et BC non esse inter se parallelas; ergo continuatae alicubi concurrent (§:81.83). Cum igitur si plana cum ipsis continuentur rectae in eisdem sint (§:478), ipsa quoque plana EFGH et IKLM concurrent. Parallela igitur non sunt (§:498): quod cum sit absurdum, sectiones AD et BC planorum parallelorum EFGH et IKLM parallelae sunt. Q. e. d.

Theorema XV. T: XV

500. Si duae rectae lineae se mutuo F:188
tangentes AC et AB duabus aliis se

mutuo

..iubus tangentibus F.G, et E.F fuerint parallelae, etiam plana ABCD et F.G L.F per ipsas ductas erunt parallela.

Demonstratio.

Concipiatur AH ad planum EGLF recta, et ex H ducantur HK, ac HI rectis EF et IG parallelae (T. 155.) erunt eaedem HK, et HI etiam parallelae rectis AB, et AC (T. 493). Perpendicularis igitur AH ad HK etiam perpendicularis est ad AB (T. 130), consequenter planum ABCD parallelum plano EFLG (T. 497). Q. e. d.

XV. Theorema XVI.

.: 189. 501. Duae lineae rectae NR, et OS a planis parallelis ABDC, EFHG, IKLM proportionaliter secantur, ut nempe sit PR : PN = TS : TO.

Demonstratio

Junguntur puncta sectionum NO, R et S rectis NO, et RS, ducaturque recta OR; erit triangulum NOR, et similiter

OSR

OSR in eodem plano (§. 480), ~~cum triangulum~~ est PQ parallela ipsi NO, QT vero parallela ipsi RS (§. 499). Est igitur RQ : QO = RP : PN, et QR : QO = TS : TO (§. 265), consequenter RP : PN = TS : TO (§. 161 et 410) Q. e. d.

Problema I.

T. XI
T. 18

502. Ad datum planum ABDC in dato puncto E erigere perpendicularem EI.

Resolutio.

Ducatur ex puncto E in dato plano ABDC intervallo quocunque EG circulus, et ex centro E erigatur recta EI ea lege, ut punctum I quodcunque a peripheriae punctis quibuscunque F et G aequaliter distet: erit ea ad planum ABCD in dato puncto E perpendicularis (§. 489).

Corollarium.

503. Cum triangulum IEG, et quodcunque eodem modo determinatum veluti EIF sit rectangulum; evidens est, sicuti unum

unum normae ita ad E G, vel E F applice-
tur, ut vertex anguli recti, quem crura com-
prehendunt, sit in centro E, fore ejus alte-
rum ad planum ABCD in dato puncto
E perpendiculare: atque adeo patet normae
usus in erigendis perpendicularibus ad pla-
num datum in puncto dato.

Scholion.

504. Necesse est ut normae crura non
desinant in aciem tenuem, sed aliquam
habeat latitudinem, ut norma ad re-
ctam E G applicata sit ad planum re-
cta, nec oculorum judicium fallat.

Corollarium II.

505. Quod si punctum I extra planum
detur, norma super plano erecta huc
illucve promovenda, donec crus ere-
ctum idem attingat, sic e puncto I per-
pendicularis I E inde demittenda.
Quod si crus normae brevius sit, quam
ut punctum I attingere possit, cum illo
ex

ex puncto I extenſo idem coincidere debet.

Theorema XVII.

T. XV. F. 190

506. Si in plano E.F.G.H una recta E H est ad planum ABCD perpendicularis, omnis recta IK vel LM ad sectionem HG perpendicularis est ad planum perpendicularis.

Demonſtratio.

Quoniam recta E.H est ad planum recta per hypoth: IK vel LM ducatur ipsi E.H parallela (§. 158); erit IK vel LM ad HG perpendiculares (§. 230) consequenter eaedem IK et LM etiam perpendiculares sunt ad rectas quascunque alias, quae per puncta K, et M in plano ducuntur, veluti ad PQ, et RS (§. 484), adeoque ad planum ipsum (§. 486) Q.e.d.

Scholion.

507. Coincidit hoc theorema cum corollario theorematis 10 (§. 495): unde per definitionem

definitionem plani perpendicularis ad alterum deduximus.)

Theorema XVIII.

T. XV. Fig. 19. 508. Sectio NO duorum planorum EF GH, et IKLM ad idem tertium ADCB perpendicularium est ad idem planum perpendicularis.

Demonstratio.

Quoniam planum EFGH ad planum ADCB perpendiculare suppos: ex O duci poterit in plano EFGH recta ADCB perpendicularis (§: 507). Eodem modo patet ex eodem puncto O duci posse rectam intra planum IKLM ad planum ADCB perpendicularem. Quare cum ad idem punctum O eidem plano ADCB nonnisi unica perpendicularis insistere possit (§: 488) communis autem planorum IKLM et EFGH sectio NO nonnisi unica recta sit (§: 472); sectio illa communis

NO tibi illa perpendicularis, quae in utro que plano EFGH et IKLM ad planum ABCD duci potest. Q. e. d.

Theorema XXIX.

209. Plani KLGE ad planum AB DC in omnibus punctis F, f, incli- nati̇o eadem. XXII F: 151.

Demonstratio.

Erigantur ex punctis F et f perpen diculares FH et fh in plano ABDC et aliae fi, et FI in plano EKLG (Plani) fitque HF = hf, et FI = fi, erunt H F, et h f, itemque FI, et fi parallelae (P: 150), consequenter etiam Hh, et Ii parallelae ipsi Ff et Hh = Ff, itemque Ii = Ff (P: 157), adeoque etiam Hh parallela ipsi Ii (P: 49.5) et Hh = Ii (P: 87 Arith). Quoniam itaque HI, et hi inter se parallelae atque aequales sunt (P: 157): erunt anguli F et f aequales (P: 104), atque adeo inclinatio pla

ni

ni ad idem planum in ſingulis punctis eadem eſt (§. 476). Q. e. d.

Caput III.

De Solidorum Conſtructione.

Problema II.

T. XI. F. 141. et 140. Sto Cubum ADCBFEHG, vel parallelepipedum IKMLNOPQ in plano deſcribere.

Reſolutio.

1. Conſtruatur pro cubo Rhombus DABC (§. 340); pro parallelepipedo Rhomboides IKLM (§. 341).

2. Conſtruantur porro pro cubo quadratum AEFB, et Rhombus BCGF (§. 338. 340), pro parallelepipedo rectangulum LMON, cujus latus LN altitudini aequale, et Rhomboides MKPO (§. 339. 341).

Cum Rhombi pro quadratis, et Rhomboides pro rectangulis conſtruantur; ut plana lateralia FBCG, et

MKPO

MKPO videri poſſint; erit Solidum AG cubus (§:459); Solidum vero IP parallelepipedum (§:460).

Problema III.

Sit Priſma ACBFDE in plano deſcribere.

Reſolutio.

1. Deſcribatur baſis, e:gr: triangulum ACB, ſi priſma fuerit triangulare. F:XI F:140.
2. In A excitetur perpendicularis ad AB altitudini aequalis AE (§:249).
3. Conſtruantur parallelogramma ACED, BCDF (§:341).

Erit ACBFDE priſma triangulare (§:456-457).

Problema IV.

Sit Pyramidem DACB in plano deſcribere.

Reſolutio. F:XI

1. Deſcribatur baſis, e:gr: triangulum F:146. ACB, ſi triangularis fuerit, ita tamen

ut latus AB, tanquam a facie aversum, non exprimatur.

2. Super AC, et CB construantur triangula ADC, et CDB in puncto D coeuntia: seu assumto, vel determinato puncto D, ducantur rectae AD, CD, BD. Erit ADBC pyramis triangularis (§:490).

Problema V.

T.XII F:152. 513. Rete describere, ex quo cubus construi possit.

Resolutio.

1. In rectam AB latus cubi quater transferatur.

2. In A erigatur perpendicularis AC lateri cubi AI aequalis (§:249), et parallelogrammum ACBD compleatur (§:339.).

3. Intervallo lateris cubi determinentur quoque in CD puncta K, M, et O.

4. Denique ducantur rectae IK, LM, NO, et BD, producanturque IK et

LM

LM utrinque in E, et F, atque in G, et H donec fiat EI = IK = KF et GL = LM = MH, et agantur rectae EG, FH.

Demonstratio.

CK et AI ad AC perpendiculares sunt per constructionem, et AI = CK = AC per constr. Ergo ACKI quadratum. (§. 338.) Non dissimili modo ostenditur esse IKML, MLNO quadrata ipsi AK aequalia. Est itaque ADFG lectus, ex quo cubus construi potest (§. 460) Q. e. d.

Problema VI.

314. Lecto describere, ex quo parallelepipedum construi potest. T. XII F. 153.

Resolutio, et Demonstratio.

1. In rectam BD transferatur ex B in H latitudo, ex H in I longitudo et I in K iterum latitudo, et ex K in D longitudo parallelepipedi.

2. Super his lineis tanquam basibus

con=

conſtruantur parallelogramma AH, EI, FK, et GD, quorum communis altitudo AB altitudini parallelepipedi aequalis.

3. Super EF vero, et HI conſtruantur parallelogramma EM, et HO, quorum altitudo EL, et HN latitudini parallelepipedi aequalis (§. 339).

Quoniam AEBH = GFIK, EH IF = GCKD, ELMF = HNOI (§. 383), ex hoc Rete parallelepipedum conſtruere licet (§. 463. 464). Q. e. f. et d.

Problema VII.

T. XII. 515. Rete pro priſmate deſcribere.

F. 154.

Reſolutio.

1. Conſtruatur baſis priſmatis e. gr. pro triangulari triangulum KBD.

2. Continuentur latus BD in A, et E, donec fiat AB = BK et DE = DK.

3. Super AB, BD, et DE conſtruantur parallelogramma AG, BH, DF, quorum

eum altitudo AC altitudini prismatis aequalis (§. 339).

4. Denique super GH triangulum GIH ipsi BKD aequale (§. 105.).

Ex hoc recti prisma triangulare, nec assimili modo multangulare quodcunque construetur (§. 457).

Theorema XX.

516. Superficies cylindri recti seclusis basibus aequalis est rectangulo sub peripheria, et altitudine cylindri. XII §. 155.

Demonstratio.

Concipiatur arcus EF adeo parvus ut pro linea recta haberi possit, ducanturque rectae EG et FH inter se parallelae, et ad EF perpendiculares. Quoniam etiam arcus EF ipsi GH parallelus (§. 465), erit EG HF rectangulum. Superficies itaque cylindri in innumera rectangula, ipsi EFHG aequalia resolvitur, quorum communis altitudo

est

eſt EG, seu altitudo cylindri (§. 229), ba-
ſes vero junctim sumtae peripheriae
aequantur. Ergo eadem aequalis eſt re-
ctangulo ex peripheria, et altitudine
cylindri (§. 359). Q. e. d.

Scholion.

517. Nimirum arculus in quolibet caſu tam exiguus aſſumitur, ut, si ejus differentia multiplicari supponatur per numerum partium, in quas peripheria concipitur diviſa, prodeat particula in dato caſu inaſſignabilis, adeoque contemptibilis parvitatis: quod fieri poſſe patet, quod polygonum circulo inſcriptum continuo appropinquat ad peripheriam. Et idem tenendum eſt in aliis caſibus, ubi de infinite parvo sermo fuerit. Sed ex inſtituto ea de re dicimus in philoſophia prima.

Problema VIII.

518. Rete pro cylindro deſcribere.

Reſo-

Resolutio.

1. Eadem diametro describantur circu= T. XII
li AB, et CD. F. 156.
2. Inveniatur horum peripheria (§. 409)
3. Super BC altitudini cylindri aequa=li construatur rectangulum (§. 339), ita ut CF sit peripheriae inventae ae=qualis.

Ex hoc recto construi potest cylin=drus (§. 517).

Theorema XXI. T. XII

519. Superficies coni recti seclusa basi F. 157.
aequalis est triangulo, cujus basis peri=pheria, altitudo latus coni.

Demonstratio.

Si arcus LM infinite parvus adeoque a recta non differens; triangulum KLM pro rectilineo recto habetur, cum=que angulus K sit infinite parvus, anguli L, M a rectis non differunt (§. 240) estque adeo KM ad LM perpendicularis (§. 78),

(§:78), conſequenter trianguli EML altitudo (§:108). Sed coni recti ſuperficies in innumera iſtiuſmodi triangula inter ſe aequalia reſolvuntur (§:467.151). Ergo integra coni recti ſuperficies aequalis eſt triangulo, cujus altitudo latus, baſis peripheriae coni aequalis (§:389) Q.e.d.

Corollarium

510. Superficies coni recti aequatur ſectori circuli latere coni tanquam radio deſcripti, cujus arcus peripheriae coni aequalis (§:415), adeoque ad ſuam peripheriam eam rationem habet, quam ſemi-diameter baſis ad latus coni (§:412 Geom.; et 17 Arit:).

Problema IX.

511. Rete pro pyramide deſcribere.

Reſolutio.

T. XII Sit e.gr. conſtruenda pyramis trian-
F. 158 gularis.

1.

1. Radio AB describatur arcus BE, et ei applicentur tres chordae BC, CD et DE inter se aequales.

2. Super DC construatur triangulum aequilaterum DFC, ducanturque rectae AD et AC.

Ex hoc textu pyramis construi potest f. 472.

Scholion.

512. Si latera basis pyramidis DC, CF et DF inaequalia fuerint, evidens est fieri debere ED = DF et CB = CF. Nec adeo latet, quid facto opus sit, si basis fuerit polygonum sive regulare sive irregulare.

Problema X.

513. Rete pro cono recto describere. T. XII. F. 159.

Resolutio.

1. Diametro basis AB describatur Circulus, et diameter producatur in C, donec AC lateri coni aequalis fiat.

2. Quaeratur ad 2 AC et AB in numeris

deteami

determinati, atque 360° numerus quartus proportionalis (P: 30 c. Arithm:).

3. Radio CA ex centro C describatur arcus DE, et ope instrumenti transportatorii fiat angulus DCE, consequenter arcus DE (P: 54) numero graduum invento aequalis.

Erit sector CDE cum circulo AB rete pro cono recto (P: 510).

Corollarium.

524. Quodsi ex A in F transferatur latus coni truncati, et radio CF arcus GH describatur, tandemque ad 360°, numerum graduum arcus GH, atque FC quartus proportionalis, quaeratur, et inde diameter circuli IF determinetur; habebitur rete pro cono truncato. Est enim CDBAF rete pro cono integro, CGFIH pro cono abscisso (P: 523): ergo DBEHIG pro truncato.

Problema XI.

525. Rete pro Tetraedro describere. T: XII.

Resolutio. F: 16

1. Construatur triangulum aequilaterum DEF (§. 198).

2 Super singulis ejus Lateribus construantur adhuc alia ibidem aequalia DAE, EBF, et FCD (§. 218).

Ex hoc Rete tetraedrum construi potest (§. 475).

Corollarium.

526. Quodsi BC continuetur in H, donec fiat CH = FC, et ut in resolutione problematis construantur triangula aequilatera CHI, CGH, HLI, DCI (§. 198); ex Rete octaedrum construi potest. (§. 475). T: XII. F: 161.

Problema XII.

527. Rete pro Icosaedro describere. T: XIII.

Resolutio. F: 162.

1. Construatur triangulum aequilaterum ABC (§. 198).

2.

2. In basi AB continuata fiat AB aequa-
lis BF = FG = GH = HD.
3. Per C agatur ipsi AB parallela CE
(P. 155), et fiat AB = CI = IK = KL =
LM = ME.
4. Ducantur rectae CS per C, et BNT
per I, et F, OV per K, et G &
5. Similiter ducantur aliae rectae YO per
BI, SP per F, et K, TQ per G, et L &
Dico ex hoc rete construi posse Icosae-
drum.

Demonstratio.

Demonstrandum est pentagona
omnia esse regularia ipsique ABC
DE aequalia (P. 425). Primum AB
= GA S'era sbagliato

Demonstrandum est viginti trian-
gula ACB, ABY, CBI, CIN, BSF, BI
F, IOK & aequilatera, et inter se aequa-
lia esse (P. 425): id quod sequenti ratio-
ne patescit. Quoniam CE parallela
ipsi

ipsi AD per constru: et AC ipsi BI (§. 257); erit o = x, et m = n (§. 233), consequenter C. AB = et ∽ CBI (§. 251). Eodem modo ostenditur esse CBI = et ∽ BIF = et ∽ FIK &c. Porro quoniam CI, et BF sunt inter se aequales atque paral=lelae per constr: erit NT parallela ipsi CS (§. 257), adeoque y = u, et i = o (§. 233), consequenter GIN = et ∽ CBI (§. 251). Eodem modo ostenditur esse CBI = et ∽ IOK = et ∽ KPL, et c = et ∽ BSF = et ∽ FTG &c. Sunt itaque omnia triangula inter se aequalia, et aequi=latera. Q. e. d.

Problema XIII.

518. Rete pro dodecaedro describere.

Resolutio. T. XIII. F. 163.

1. Describatur pentagonum regulare (§. 251).
2. Applicata regula ad A, et D ducantur rectae AG, et DF ipsi AB aequales.
3. Eodem modo ducantur AI, et CH,

BL

BL et DK, BN et EM &

4. Intervallo lateris pentagoni fiat intersectio in Q ex G, et L, in R ex N et O, in S ex H et F & ducantur que GQ et QL, NR et OR, HS et FS &

5. Eodem modo construantur pentagona reliqua a, b, c, d, e, f.

Demonstratio.

Demonstrandum est pentagona omnia esse regularia ipsique ABCDE aequalia (§. 475). Nimirum AB = GA = BL = GQ = QL, per constr. Cumque anguli x mensura sit arcus dimidius ABCDE (§. 304), anguli vero pentagoni E similiter sit mensura dimidius arcus ABCD (§. 314); erit angulus x angulo pentagoni E aequalis (§. 141). Cumque eodem modo ostenditur, esse quoque angulum u angulo pentagoni aequalem; erit ABLQG pentagonum regulare (§. 352), ideoque ob latus commune

mune AB, ipsi AEDCB aequale (§. 177. 161); Eadem demonstratio cum de reliquis pentagonis valeat; evidens est, omnia, et regularia, et inter se aequalia esse. Q. e. d.

Problema XIV.

529. Corpora Geometrica construere. T. XII F: 160

Resolutio.

1. Delineentur retia in charta ex pluribus foliis compacta (§. 511, et seqq.).
2. Delineata excidantur, resecta charta superflua juxta eorum perimetros.
3. Excissa agglutinentur chartae colloratae.
4. Hujus superfluum ita resecetur, ut ambitus perimetri albi, margines quidam relinquantur, quemadmodum in reti tetraedri indicavimus.
5. Singula retium intra perimetrum lineamenta, e.g. EF, FD, et DE in reti tetraedri, scalpello profundius imprimantur,

tur, ut comode implicari queant latera perimetri solidi.

6. Denique latera complicentur, et marginum ope conglutinentur.

Theorema XXII.

530. Cubus, Tetraedrum, Octaedrum, Dodecaedrum, et Icosaedrum sunt corpora regularia, nec praeter haec quinque aliud ~~defendere~~ possibile.

Demonstratio.

Cubus sex quadratis, tetraedrum quatuor, octaedrum octo, icosaedrum viginti triangulis regularibus, dodecaedrum denique duodecim pentagonis regularibus inter se aequalibus terminantur (P. 460. 453). Sunt igitur haec corpora regularia (P. 453). Quod erat unum.

In tetraedro tres, in octaedro quatuor, in icosaedro quinque anguli plani trianguli regularis ad solidum efficiendum concurrunt (P. 513. 514. 515). Quoniam

niam vero summa 6 ejusmodi angulo-
rum est 360° (§. 143); triangulis regula-
ribus nullum corpus praeter illa tria
contineri potest (§. 452). In cubo tres an-
guli quadrati solidum efficiunt (§. 511).
Quare cum summa quatuor ejusmodi
angulorum sit 360° (§. 48. 144) qua-
dratis nullum corpus continetur nisi
Cubus. In dodecaedro tres anguli penta-
goni regularis solidum constituunt (§.
516). Quia vero summa quatuor est
432°, et summa trium in reliquis figu-
ris regularibus 360° major (§. 345), ad an-
gulum vero solidum constituendum mi-
nimum tres plani requiruntur (§. 447),
pentagonis regularibus nonnisi dodecae-
drum, figuris vero plurium laterum
nullum corpus terminari potest. Cor-
pora igitur regularia nonnisi quin-
que sunt. Quod erat ostensum.

Caput IV.

De Dimensione Solidorum.

531. Superficiem ac soliditatem cubi determinare.

Resolutio.

I. Cum superficies cubi ex sex quadratis aequalibus componatur (D: 460), latus cubi in seipsum ducatur, et factum 6 multiplicetur (D: 370).

T. XIII F: 164 II. Quod si idem factum in latus ducatur: prodibit soliditas cubi.

Sit e: gr: latus cubi AB 2° 7' 4''.

AB = 274	Basis = 75076
274	AB = 274
1096	300304
1918	525532
548	150152
ABDC = 75076	Solidit: 20570824
6	
Superfic: 450456	

Demonstratio

Cum mensurae solidorum sint cubi, quorum

quorum latera perticae, pedis, digiti (§. XIII) aequalia (§. 477); soliditatem cubi deter- (§. 164) minaturus invenire debet, quot perticae, pedes digiti cubici contineantur. Quodsi jam latus in partes quotcunque divisum concipiamus, totidem cuborum ordines, quot in latere AB partes, et in quolibet ordine totidem existent, quot in basi ACFE quadrata. Quare si basin ACFE hoc est, factum in latere cubi ex se ipsum (§. 370), et latus cubi AB multiplices; prodibit numerus cuborum minorum, ex quibus major componitur. Q. e. d.

Corollarium I.

531. Si latus cubi fuerit 10, ejus soliditas 1000: si illud 12, haec 1728. Quare cum pertica Geometrarum sit 10 pedum, pes 10 digitorum etc. (§. 25); pertica cubica est 1000 pedum cubicorum, pes cubicus 1000 digitorum cubicorum etc.

Hinc

Hinc in exemplo nostro solidi basis est 20°. 570' 824''. Similiter cum pertica Rhenana sit 12 pedum, pes 12 digitorum, pertica cubica est 1728 ~~digitorum~~ pedum, pes cubicus 1728 digitorum. Quare si in nostro exemplo 20570824 dividas per 1728, quotiens 11904' et 712''. Quotus 11904' porro dividas per 1728; quotiens erit 6° et 1536, adeoque habebis 6°, 1536' et 712''.

Scholion.

533. Patet adeo, quantum divisio mensurae in 10 partes praestet divisione in 12.

Corollarium II.

534. Cubi sunt in ratione triplicata laterum (P. 259 Arith.) et aequales, si latera aequalia sint.

Theorema XXIII.

535. Parallelepipeda, Prismata et Cylindri; quorum bases et altitudines

aequantur

aequantur, aequalia sunt.

Demonstratio.

Concipiantur haec corpora planis eorum basibus parallelis secari in discos crassitiei quantumlibet exiguae. Quoniam altitudines aequantur (Hyp:) ex uno tot disci prodibunt, quot ex altero. Cumque plana sectionum basi parallelarum eidem aequalia (t. 453. 456. 463.); tales vero illorum corporum inter se aequales sunt, (Hypot:) etiam disci singuli unius corporis discis singulis alterius aequantur (Theorem:), consequenter cum disci omnes simul sumti cum corporibus idem sint, corpora tota inter se aequalia sunt (t: 58 Arithm:). Q. e. d.

Problema XVI.

536. Metiri superficiem, ac soliditatem parallelepipedi.

Resolu:

Resolutio

F. XI. I. Quaeratur area parallelogrammorum ILMK, LMON, et OMKP (§. F. 142. 375. 387).

II. Addantur in unam summam et haec multiplicetur per 2. Erit factum superficies parallelepipedi (§. 464).

III. Quod si basis ILMK multiplicetur per altitudinem, prodibit soliditas ejusdem.

Sit v. gr. LM = 36, MK = 15, MO = 12 et parallelepipedum rectangulum.

LM = 36	LM = 36	MK = 15
MK = 15	MO = 12	MO = 12
180	72	30
36	36	15
LIKM 540	LMON 432	MOKP 180
MO = 12	LIKM 540	
1080	MOKP 180	
54	1152	
	2	

Solid: 6°480' a 3°04' Superficies

Demonstratio.

De parallelepipedo rectangulo eadem valet

valet demonſtratio, qua in probl. 15 (§. 531) uſi ſumus. Cum vero obli=quangulum aequetur rectangulo ſuper eadem baſi, et eiuſdem altitudi=nis (§. 595); ducta baſi in altitudinem habetur quoque ſoliditas obliquan=guli. Q. e. dem.

Theorema XXIV.

537. Planum diagonale AHFD divi=dit parallelepipedum ABDCEFG in duo priſmata ADCEFH et AD BFGH inter ſe aequalia.

Demonſtratio. T. XIII F. 165.

Diagonalis AD dividit paralle=logrammum CABD in duo trian=gula aequalia ACD et DBA (§. 337). Habent ergo priſmata baſes aequales. Quare cum DF perpendicularis ad DB (§. 460), ſit etiam perpendicularis ad DA et DC, adeoque cum ad triangu=lum ADB, tum ad alterum ADC (§. 49[illegible])

(§. 492. 494), eadem quoque est utri-
usque altitudo DF (§. 227), et ipsa iti-
dem aequalia sunt (§. 536). Q. e. d.

Corollarium.

538. Est ergo prisma triangulare di-
midium parallelepipedi super eadem
basi, et ejusdem altitudinis.

Problema XVII.

539. Metiri superficiem ac soliditatem prismatis.

Resolutio.

1. Quaeratur basis (§. 391. 400. 401), et multiplicetur per 2.
2. Quaeratur porro areae parallelogrammorum prisma circumcirca terminantium, et eorum summa adda-
T. XI. tur facto antecedenti.
F. 140. Ita prodibit superficies integra prismatis (§. 456).
3. Quodsi basis BAC per altitudinem CD multiplicetur; habebitur ejusdem solidi-

Soliditas.

E. gr: sit BC = 4° 3' 2'' AG = 3° 5' 7''
CD = 8° 6' 9''.

½ BC = 216''	AC = 432''
AG = 357	CD = 869
1512	3888
1080	2592
648	3456
Basis 77112''	ACDE 375408
CD = 869	3
694008	1126224
462672	2ABC 154224
616896	Superfic: 128° 04' 48''

67° 01 0' 328'' Solidit:

Demonstratio

Prisma triangulare est dimidium parallelepipedi super dupla basis sed ejusdem altitudinis (§. 538). Quodsi ve: 2° dupla basis, hoc est parallelogrammum multiplicitur per altitudinem soliditas parallelepipedi prodit (§. 536). Ergo

Ergo si simplex, hoc est, triangulum per eandem altitudinem multiplicetur; parallelepipedi dimidium, hoc est priſmatis soliditas habebitur. Omnia priſmata reliqua cum in triangularia reſolvi poſsint; eorum quoque soliditas prodit baſi per altitudinem multiplicata. Q. e. d.

Scholion

540. In exemplo noſtro aſsumſimus, priſmatis baſin eſſe triangulum regulare. Quodsi vero baſis fuerit figura irregularis; parallelogramma lateralia inaequalia sunt, adeoque area uniuſcujusque sigillatim invenienda.

Problema XVIII.

XI. 541. Data diametro AB, et altitudine
F:143. cylindri CF; invenire superficiem ac soliditatem ejus

Resolutio.

1. Quaeratur peripheria baſeos, et baſis

ipsa

ipsa (§:409), haecque multiplicetur per 2.
2. Peripheria ducatur in altitudinem; quod prodibit est superficies, seclusis basibus (§:517).
3. Quare si eidem addatur factum antecedens; habebitur superficies integra.
4. Ducatur quoque basis in altitudinem. Factum erit soliditas cylindri.

Ex: gr: Sit AB = 5°61, CF = 24°6' erit peripheria = 17° 584'''

CF = 24° 600

10550400
70335
35168

Sup: absque Bas: 432°56'64'' [00
Dupl: Bas: 492352

Superfic: 481°80'16''
Basis = 24°61'76''
CF = 2460

14770560
984704
492352

605°592'960''

Demonstratio

Demonſtratio.

Cum circulus aequalis ſit triangulo, cujus baſis peripheria, altitudo radius (§. 410); cylindrus aequalis erit priſmati triangulari eandem cum ipſo altitudinem, et baſin aequalem habenti (§. 520). Ejus ergo ſoliditas habetur, ducta baſi in altitudinem (§. 539). Q. e. d.

Theorema XXV.

XIII. F. 166. 542. Pyramides, et Coni ſuper eadem baſi, et ejuſdem altitudinis ſunt aequales.

Demonſtratio.

Sit ACB unum e triangulis, quibus terminatur pyramis una; ABD vero unum e triangulis, quibus terminatur altera: ducta EL ipſi AB parallela (§. 157) erit IK = LM (§. 116), adeoque ob CK = DM per hypoth. CI = DL (§. 91 Arithm.): EF vero et GH erunt latera planorum, quibus ſecantur pyramides baſibus ſuis parallelorum. Jam cum

cum sit △ CEF ∽ △ CAB, et △ DGH ∽ △ DAB (§. 268), erit CI : CK = EF : AB, et DL : DM = GH : AB (§. 396). Sed CI = DL, et CK = DM, demonstr. Ergo EF : AB = GH : AB (§. 167 Arith.), conse=quenter EF = GH (§. 177 Arithm.). Jam si pyramides secantur planis basi pa=rallelis, plana secationum basi simi=lia sunt (§. 474), consequenter planum cujus latus est EF, erit ad basin ut EF^2 ad AB^2, et planum, cujus latus est GH, erit ad eandem basin ut GH^2 ad AB^2, (§. 406). Quare cum EF^2 = GH^2, demon=stratum, planum, cujus latus est EF, et planum, cujus latus est GH, ad basin eandem rationem habent (§. 168 Arith.), consequenter plana ista inter se ae=qualia sunt (§. 177 Arith.). Igitur, et strata quantumlibet exiguae crassitiei, in ea=dem a basi distantia inter se aequan=tur. Quoniam itaque ob aequales alti=

tudines

tudines (ſ. hypoth.) ex una pyramide tot diſci ſecari poſſunt, quot ex altera; pyramis una alteri aequalis ſit neceſſe eſt (§. 88 Arith.). Quod erat unum.

Quod ſi triangula ACB, et ADB fuerint ſectiones triangulares conorum; erunt EF, et GH diametri circulorum baſi communi parallelorum (§. 458). Cum adeo circuli iſti aequales ſint (§. 171), eodem quo ante modo demonſtratur, conos aequales eſſe. Quod erat alterum.

Theorema XXVI.

§. XIII. §. 167. 543. Priſma triangulare in tres pyramides aequales dividi poteſt.

Demonſtratio.

Quoniam planum ACB parallelum plano EDF (§. 456), pyramides ABCF, et DFEA habent altitudinem eandem (§. 498) atque baſes ACB, et DFE aequales (§. 457). Sunt ergo aequales (§. 542). Similiter cum BE. FC ſit parallelogrammum

mum (§:457), △GFB = △BFE (§:337).
Habent adeo pyramides AGBF, et BEFA aequales baſes. Quoniam vero hae baſes in eodem ſunt plano, quod ſpre ai-bet, et verticem communem in A habent, ab eodem vero puncto ſublimi A ad idem planum BEFC non niſi unica perpendicularis duci poteſt (§:488); pyramides iſtae eandemque altitudinem habent, conſequenter aequales ſunt (§:542). Quamobrem tres iſtae pyramides inter ſe aequantur (§: 87 Arith). Q. e. d.

Scholion.

544. Si ex ligno pareretur prisma, et debita ratione ſecaretur; demonſtratio captui tyronum magis accomodabitur. Immo ad bilancem aequalitas ponderum examinari, et inde magnitudinis aequalitas colligi poteſt.

Corollarium

545. Pyramis triangularis eſt tertia pars priſmatis ſuper eadem baſi, et ejuſdem altitudinis.

Corollarium II.

546. Et quoniam multangulare pyramis in triangularia reſolvi poteſt; qualibet pyramis eſt pars tertia priſmatis ſuper eadem baſi, et ejuſdem altitudinis (§. 184 c. Arith.).

Corollarium III.

547. Quia conus pro pyramide infinitangula haberi poteſt, et cylindrus pro priſmate infinitangulo, conus pars tertia eſt cylindri ſuper aequali baſi et ejuſdem altitudinis.

Problema XIX.

548. Metiri ſuperficiem, ac ſoliditatem pyramidis et coni.

Reſolutio.

Quaeratur ſoliditas priſmatis vel cylindri eandem cum pyramide, vel cono baſin habentis (§. 539. 541.), inventaque

taque per 3 dividatur: quotus erit soliditas pyramidis vel coni (§:547.546).

E:gr: Si soliditas prismatis fuerit 6701032.8;" ut in problemate 17 (§:540); erit soliditas pyramidis 2233677.6." Si soliditas cylindri fuerit 6055929.60" ut in problemate 18 (§:542); erit soliditas coni 2018643.20."

Superficies pyramidis habetur, si tam T.XI ABC, quam triangulorum lateralium F:146. ACD, CBD, BDA areae investigentur (§:392) atque in unam summam colligantur.

Coni denique recti superficies prodit, peripheria baseos in latus ejus dimidium ducta (§:519), et basi, qui circulus est eidem addita.

E:gr: Sit diameter coni NM = 56, erit T.XI peripheria 175.84,''' basis 2461.76 (§:429) F:144 Sit altitudo KL = 246." Quoniam LM = ½ NM = 28; et KM² = KL² + LM² = 60516.

60516 + 784 = 61300 (§. 417) erit KM'' = 2475''' (§. 269 Arith.), conſequenter ſuperficies coni recluſa baſi 1166020'' et hinc integra 1411196''

Problema XX.

§. XIII. 549. Metiri ſuperficiem, ac ſoliditatem coni truncati, datis ejus altitudine GH, et diametris baſium AB et CD.
§. 168. nº. 1.

Reſolutio.

1. Datis diametris baſium CD et AB inveniantur peripheriae (§. 429).

2. Ad quadratum altitudinis GH addatur quadratum ſemidifferentiae radiorum AH et ex aggregato extrahatur radix (§. 269 Arith.), ut habeatur latus AG.

3. Semiſumma peripheriarum multiplicetur per latus AG.

Sit e. gr. AB = 8', CD = 6', GH = 10' erit AH = 1'.

100 — 314 — 8''

8

2512''' periphe: maj:

GH² = 100

AH² = 1

AC² = 101

Ergo AC = 1005''' fere,

100 — 314 — 6'

6

1884''' Periphe: min:

2512 Periphe: maj:

4396 Summa

2198 Semisumma

1005 AC

10990

219800

2208990 Super: coni truncati

Demonstratio

Superficies coni truncati relinquitur, si superficies coni minoris EGD a super-ficie majoris AEB subtrahitur; sed su-perficies T. XIII T: 168 nº 1, et nº 2.

perficies minoris aequabitur triangulo, cujus basis HI peripheria diametro GD descripta, altitudo MK, latus EG, superficies majoris vero triangulo, cujus basis NO peripheria diametro AB descripta, altitudo ML, latus AE (P. 519). Cum vero prior sit pars posterioris; illa ex hac subtracta, relinquitur pro superficie coni truncati trapezium parallelarum basium HION, cujus quidem bases HI, et NO peripheriis diametris GD, atque AB descriptis aequales sunt, altitudo KL vero latus AG existit. Habetur igitur superficies coni truncati semisumma dictarum peripheriarum in AG ducta (P. 400). Q. e. d.

Demissa ex G perpendiculari GH ad diametrum AB, cum etiam sit axis EF ad eandem in cono recto perpendicularis (P. 467), erunt GH et EF parallelae (P. 491). Quamobrem cum triangulum

gulum EAF ſecet duo plana paralle:
la CD, et AB ex Hypoth: erunt ſemidia:
metri CG, et AF parallelae (§:499),
conſequenter CG=HF (§:226) et CH
=FG (§:231). Soliditatem adeo coni
truncati inventurus.

1. Inferat (§:268): ut differentia ſemidi:
ametrorum AH ad altitudinem coni
truncati CH, ita ſemidiameter major
AF ad altitudinem coni integri FE,
per prob: 33 Arit: (§:302 Arit) invenien:
dam.

2. Ex hac inventa ſubducat altitudinem
coni truncati GF, ut relinquatur alti:
tudo ablati EG.

3. Quaerat ſoliditatem conorum CED
et AEB (§:548).

4. Denique illam ex hac auferat;
reſidua erit ſolidita(s) coni truncati ACDB.
E:gr: Sint omnia, ut ante: erit FE=40,
et hinc EG aequalis 30.

Peripha:

Peripheria major	2512'''
$\frac{1}{4}$ AB	200
Baſis major	502400
EF	4000
	2009600000
3 Conus AEB	$669866666\frac{2}{3}$
Periph: min:	1884'''
$\frac{1}{4}$ CD	$1\frac{1}{2}00$
	94200
	1884
Baſis minor	282600
$\frac{1}{3}$ EG	1000
Con: GED	282600000
Con: AEB	$669866666\frac{2}{3}$
Con: trunc:	$387266666\frac{2}{3}$

Theorema XXVII.

550. Sphaera aequatur pyramidi, cujus baſis aequalis ſuperficiei, altitudo autem radio ſphaerae.

Demonſtratio.

Concipiatur ſuperficies ſphaerae in quadrata infinite exigua reſoluta, quae

quae a planis non amplius diſsidens, et ex centro concipiantur ad eorum angulos ductae rectae. Evidens est ſphaeram conſtare ex innumeris pyramidibus quadratis in centro coeuntibus quarum altitudines a radiis differunt quantitate inaſsignabili, hoc est, revera nulla; baſes vero ſimul totae ſuperficiei ſphaerae aequantur. Tota igitur ſphaera recte habetur pro pyramide, cujus baſis ſuperficies, altitudo radius ſphaerae. Q. e. d.

Theorema XXVIII.

551. Sphaera est ad cylindrum ſuper aequali baſi, et ejuſdem altitudinis ut 2 ad 3. T. XIII. F. 169.

Demonſtratio.

Si quadratum ABDC cum quadrante DBC, et triangulo ADC inſcripto circa latus DC gyretur, ipſum quidem cylindrum (§. 465) quadrans hemiſphaerium

rium (§:410), triangulum conum (§:
476) describit. Altitudo eorum corporis
cum eadem sit nempe DC (§:107); si
ea in discos quantumlibet exiguae crass=
itiei secentur, numerum eorum in
omnibus idem erit. Sit jam EH semi=
diameter unius disci cylindri; erit E
G semidiameter disco respondentis
in hemisphaerio, EF semidiameter
disci in cono. Cum vero hi disci sint
circuli, quod ex genesi patet (§:131);
erunt ipsi inter se ut quadrata re=
ctarum EH, EG, et EF (§:408), hoc
est, cum sit ob parallelismum EH,
et CB & hipoth: EH = CB (§:138)
= CG (§:40), atque ob CD: DA = C
E: EF (§:168), et CD = DA (§:98) E
C = EF ut quadrata rectarum CG,
EG, et EC. Quare si discum coni
a disco cylindri subtrahas, relinquitur
discus sphaerae (§:412). Idem cum
valeat

valeas de singulis discis ex reliquis divisionibus emergentibus, soliditas sphaerae relinquetur soliditate coni ex soliditate cylindri subducta. Est vero conus $\frac{1}{3}$ Cylindri (§. 547). Ergo Sphaera duas ejusdem partes tertias continet. Q. e. d.

Theorema XXIX.

552. Cubus diametri est ad sphaeram propemodum ut 300 ad 157.

Demonstratio.

Si diameter sphaerae 100, cubus ejus 1000000 (§. 531), et cylindrus eandem cum sphaera basin, et altitudinem habentes 785000 (§. 541), consequenter sphaera 1570000 : 3. (§. 551). Est itaque cubus diametri ad sphaeram ut 1000000 ad 1570000 : 3, hoc est, ut 300 ad 157 (§. 178 Arith.) Q. e. d.

Scholion.

553. Dico cubum diametri esse ad sphae-

Sphaeram propemodum ut 300 ad 157. In demonstratione enim assumitur ratio prope vera diametri ad peripheriam 100: 314 (§. 406).

Theorema XXX.

554. Superficies sphaerae est quadrupla circuli radio sphaerae descripti.

Demonstratio.

Quoniam sphaera aequalis est pyramidi, cujus basis est superficies, altitudo radius sphaerae (§. 550) superficies ejus habebitur, si soliditas per tertiam semidiametri, aut sextam diametri partem dividitur (§. 545). Est vero soliditas sphaerae factum ex $\frac{2}{3}$ circuli maximi in diametrum (§. 551. 541). Quare si factum per $\frac{1}{6}$ diametri dividas, seu, quod perinde est, primum per diametrum, ut quotus sint $\frac{2}{3}$ circuli maximi, hoc est, circuli circa diametrum sphaerae descripti (§. [illegible] 110 Arithm), et deinde

de

dem $\frac{1}{6}$ (§. 108. a 10 Arit.); cui quotus
$\frac{12}{3}$ circuli maximi (§. a 43 Arit.), hoc est
quadruplus circuli maximi (§. a 3. A).
Sed idem est superficies sphaerae ut demonstratum. Ergo sphaerae superficies circulo maximo quadrupla. Q.e.d.

Corollarium.

555. Area circuli maximi est factum ex peripheria ejus in quartam diametri partem (§. 49). Ergo quadruplum cujus circuli est factum ex peripheria in diametrum. Superficies ergo sphaerae habetur, peripheria in diametrum ducta, consequenter rectangulo aequalis est, cujus basis peripheria circuli radio sphaerae descripti, altitudo diameter sphaerae (§. 375).

Problema XXI.

556. Data diametro sphaerae invenire superficiem, ac soliditatem ejus.

Resolutio.

Resolutio.

1. Quaeratur peripheria circuli radio sphaerae describendi. (§. 429.)
2. Inventa ducatur in diametrum: factum est superficies sphaerae (§. 555.)
3. Hoc si porro multiplicetur per sextam diametri partem; prodibit sphaerae soliditas (§. 550. 540.)

E. g. Sit diameter 5600''', erit
Periph. Circuli 17584''''
Diam: 5600

10550400
87920

Superf. Sph: 98470400'''
Superf. Sphae: 984704''|00
Diameter 560

59082240
4923520

15 4551434240

88148448240) 91905706 2/3 Sol. Sphae.
666666666

Aliter.

1. Quaeratur cubus diametri 17561
6000''' (§.

6000'' (§:531).

2. Inveniatur porro ad 300, 157, et cubum inventum. 175616000'' numerus quartus proportionalis 9190706$\frac{2}{3}$ (§:30 arithm:), qui erat soliditas sphaerae (§:552).

Scholion.

557. Segmenta sphaerae ac sectores inferius in Analisi facilius invenire docemus, quam hoc loco fieri poterat.

Problema XXII.

558. Metiri superficiem, ac soliditatem quinque corporum regularium.

Resolutio.

Cubi soliditas investigatur (prob: 15 (§:539)), Tetraedrum cum sit pyramis, et octaedrum pyramis geminata, icosaedrum vero ex viginti pyramidibus triangularibus, dodecaedrum ex duodecim quinquangularibus constet, quarum bases in superficie icosaedri, et dodecaedri sunt, vertices in centro coeunt (§:470. 475); horum

horum corporum soliditas habetur (prob: 19 §: 548). Superficies eorundem prodit, si area figurae unius ex termi=nantibus ipsa quaeratur (§: 392, 402) et inventa in numerum, a quo corpus denominatur, multiplicetur nempe pro tetraedro in 4, pro exaedro, seu cubo in 6, pro octaedro in 8, pro dodecaedro in 12, pro icosaedro in 20 (§: 475).

Problema XXIII.

T:XIII. F:170. 559. Corporis irregularis cujuscunque soliditatem invenire.

Resolutio.

1. Immittatur corpus parallelepipedo cavo, eique aqua, aut arena super=fundatur, et altitudo aquae, seu are=nae AB notetur.

2. Corpore extracto, observetur denuo aquae, aut arenae complanatae alti=tudo AC.

3. Subtrahatur AC ex AB, ut relin=quatur

quatur BG.

4. Quoniam corpus irregulare aequatur parallelepipedo, cujus basis CGF altitudo BG; ejus soliditas invenietur per probl: 10 (§: 536.).

Sit e. gr: AB 8', AC 5'; et BG 3'. Sit porro DB 12', BE 4'; erit soliditas corporis 144'.

Scholion. I.

560. Quodsi corpus in aqualiculo istiusmodi commode deponi nequeat, e. gr: si statuam certo loco affixam dimetiri jubeamur; prisma quadrangulare, aut parallelepipedum circa ipsum construi debet ex asseribus. Reliqua peragenda sunt ut ante.

Corollarium.

561. Inveniri ergo potest, quot linearum cubicarum sit aliquod lignum, saxum, metallum, aut materia aliqua quaecunque pendens librariam.

Scholion

Scholion II.

562. Hinc in uſus futuros conſtrui poteſt Tabula gravitatem diverſorum corporum oſtendens secundum libras, quas pendit eorum pes cubicus: id quod per praxes hydroſtaticas aliis adhuc modis fieri poteſt, ubi suo loco oſtendetur.

Problema XXIV.

563. Invenire ſoliditatem corporis cavi.

T:XIII.

Resolutio.

F:171. Caſus I. Si corpus cavum in numero geometricorum non contineatur, reſolutio eadem, quae problematis praecedentis (§:559).

Caſus II. Si corpus cavum fuerit parallelepipedum, priſma, cylindrus, sphaera, pyramis, vel conus; ſoliditas primum totius corporis cavitate incluſa, dein cavitatis, quae eandem cum corpore figuram habere supponi=

supponitur, per methodos supra tradi=
tas (P: 536. 539. 541. 548. 556) invenia=
tur: hac enim ex ipsa subducta, relin=
quitur soliditas corporis cavi.

Sit: e: gr: soliditas cylindri cavi
ABCD invenienda, sitque diameter
totius corporis **AB** 56'' longitudo **AC**
2°4'6'', erit soliditas cylindri inclusa
cavitate 605'591''960''' Sit diameter
cavitatis 500''; erit soliditas 482'
775''000''': quae ex supra in=
venta subducta relin=
quit soliditatem
corporis cavi
122'817''960'''

Caput V.

Caput V.
De similitudine ac ratione Solidorum.
Theorema XXXI.

564. Corpora similia sunt, quorum plana terminantia, et numero aequalia, et similia existunt.

Demonstratio.

Cum corpora ex planorum termi- nantium nexu gigni posse conci- piamus; eodem modo determinan- tur, si plana terminantia, et numero aequalia, fiunt et similia (S. 119). Sunt igitur et ipsa similia (S. 120). Q. e. d.

Corollarium I.

565. Cum in planis similibus an- guli omologi sint aequales (S. 175), anguli vero solidi omologi ex concur- su planorum homologorum (S. 476) et in corporibus similibus multitudi- ne

ne aequalium oriantur (§. 504); in corporibus similibus anguli solidi homologi aequales sunt (§. 449).

Corollarium II.

566. Quoniam in planis similibus latera homologa sunt proportionalia (§. 175); si igitur juxta parallelepipedum ABDCEHGF aliud simile abdcehgf (quod in tabula non expressimus) poni imaginemur; erit AB : BD = ab : bd, et DB : BG = db : bg. Quamobrem ex aequo AB : BG = ab : bg (§. 194 Arithm.). Cum adeo sit AB : ab = BD : bd, et AB : ab = BG : bg (§. 173 Arith.); corporum similium longitudines AB, et ab, latitudines DB et db, itemque altitudines BG, et bg in eadem ratione existunt.

Corollarium III.

567. Cubus sex quadratis aequalibus terminatur (§. 460). Sunt vero quadrata omnia similia (§. 98. 175). Ergo cubi

cubi omnes sunt similes (§. 564).

Corollarium IV.

568. Quoniam corpora regularia planis regularibus, adeoque similibus (§. 106. 175), et ejusdem quidem speciei numero aequalibus (§. 530) terminantur; corpora quoque regularia ejusdem speciei similia sunt (§. 564).

Corollarium V.

569. Omnia igitur Tetraedra, omnia quoque Octaedra, Dodecaedra, et Icosaëdra similia sunt (§. 530).

Theorema XXXII.

570. Cylindrorum, et conorum similium altitudines sunt ut radii basium; axes sunt itidem ut radii basium, et iis sub eodem angulo junguntur.

Demonstratio.

T. XI. Si coni et cylindri similes sunt,
F. 143. ea in iisdem eadem sunt, quae a se

[illegible]se invicem discerni possint (§. 14 §. XI
Arith.). Patet vero Conos et Cylindros §. 14
non posse distingui nisi per rationem axis CF vel KL ad diametrum basis DE vel NM, atque angulum CFE, vel KLM, quem efficit axis cum diametro (§. 465. 467.). Axes igitur in Conis et Cylindris similibus ad diametros basium eandem rationem habent, et ad eas similiter inclinantur, seu ad eundem angulum insistunt. Quod erat unum.

Cum in figuris solidis perinde ac in planis (§. 118) altitudo sit recta ex vertice in basin ad angulos rectos ducta; in Conis et Cylindris rectis axes sunt altitudines (§. 465. 467.), adeoque patet, per demonstrata, altitudines rectorum esse diametris basium proportionales. Et quoniam in caeteris altitudines in triangulis rectangulis subtendunt eosdem angulos obliquos, sub quibus nempe

pe axes ad diametros inclinantur; ideo axibus (§:456), consequenter etiam diametris basium (§:167 Arith.) proportionales sunt. Quod erat alterum.

Theorema XXXIII.

571. Omnis sphaera est alteri similis.

T. XI.

Demonstratio.

F. 145. Omnem semicirculum esse alteri similem, patet ex demonstratione theorematis a part. 1. (§:135). Sed sphaera describitur semicirculo K circa diametrum AB gyrato (§:459): omnes igitur sphaerae eodem modo determinantur (§:119), adeoque similes sunt (§:120). Q. e. d.

Theorema XXXIV.

572. Omnia prismata, parallelepipeda, cylindri, pyramides, et coni in ratione composita basium, et altitudinum sunt.

Demonstra

Demonstratio.

Sunt enim ut facta ex basibus in altitudines (§. 536. 539. 541. 548. Geom: et §. 178 Arithm:): ergo in ratione composita basium, et altitudinum (§. 159 Arithm:). Q. e. dm.

Corollarium I.

573. Quare si bases fuerint aequales, altitudinum, si altitudines, basium rationem habent (§. 181 Arith.)

Corollarium II.

574. Cylindrorum, et conorum bases sunt circuli (§. 465. 467). Circuli sunt in ratione duplicata diametrorum (§. 409); Ergo cylindri, et coni quicunque sunt in ratione composita ex simplici altitudinum, et duplicata diametrorum (§. 572); et si fuerint aeque alti, sunt ut quadrata diametrorum (§. 573.)

Corollarium.

Corollarium III.

575. Quare si in cylindris altitudo fuerit diametro basium aequalis, (§. ~~[illegible]~~) erunt in ratione triplicata diametrorum basium (§. 159 Arithm:).

Problema XXV.

576. Invenire cubum dato corpori, cujus soliditas inveniri potest, aequalem, vel qui sit ad hoc in data quacunque ratione, e: gr: ut 3 ad 1, vel ut 1 ad 4.

Resolutio.

1. Investigetur soliditas corporis ff problemate data (capp: praec: tradita).

2. Ex ea, vel ejus multiplo, aut submultiplo desiderato, e: gr: triplo aut subquadruplo extrahatur radix cubica (§. 182 Arithm:).

E: gr: sit soliditas cylindri 107° 171' 875'' reperietur latus cubi aequalis 4°. 7' 5''.

Problema

Problema XXVI

577. Dato corpore, cujus soliditas inveniri potest, invenire dimensiones alterius ipsi aequalis dati generis et altitudinis vel baseos datae.

Resolutio.

1. Inveniatur soliditas corporis propositi in problemate (cap: praec: tradita.)
2. Dividatur ipsa basin datam: quotus erit altitudo in prismatis, parallelepipedis, et cylindris (§. 536. 539. 541 Geom; et §. 200 Arithm:) tertia vero altitudinis pars in pyramidibus atque conis (§. 548 Geom; et §. cit. Arith.)
3. Si altitudo detur, soliditas corporis inventa dividatur per eam, ut habeatur basis prismatum, parallelepipedorum, et cylindrorum; per tertiam altitudinis partem, ut habeatur basis pyramidum, et conorum (§. §. cit.)

4. Pro

4. Pro parallelepipedis, et prismatis tri=angularibus, et quadrangularibus area baseos discerpatur in factores duos, ut habeatur longitudo, et altitudo (P:387. 392. 402. 456. 462), quorum alteruter pro basi triangulari prismatis ½ multiplicandus (P:392), et insuper pro multangulari basi alter numerum laterum dividendus, ut prodeat latus figurae polygonae (P:402).
5. Pro Cylindro, et Cono ex basi inventa porro quaerenda ejus diameter (P:434).
E: gr: Sit soliditas alicuis corporis 3° 456' 978". Inveniri debet cylindrus, cujus altitudo 2° 4' 6". Reperietur basis 1° 40' 53" fere; diameter 134".

Theorema XXXV.

578. Corpora similia, prismata parallelepipeda, cylindri, pyramides atque coni sunt in ratione triplicata homologorum laterum, itemque altitudinum.
Demonstra=

Demonſtratio.

Sunt enim in ratione compoſita baſium, et altitudinum (§. 57(2). Sed baſes ſunt in ratione duplicata homologorum laterum (§. 406. 570) et altitudines lateribus baſium homologis proportionales ſunt (§. 566). Ergo corpora ipſa in ratione triplicata laterum homologorum, itemque altitudinum, exiſtunt (§. 150 Arithm.). Q. e. d.

Theorema XXXVI.

579. Sphaerae ſunt ut cubi diametrorum. Tab. VII F. *

Demonſtratio.

Sit circulo DAEB quadratum GFIH circumſcriptum (§. 351). Quodſi ſemicirculus AEB cum quadrato dimidio AGHB circa axem communem AB in orbem moveatur, ille ſphaeram, hoc cylindrum deſcribet, cujus altitudo AB diametro baſis IH aequalis (§. 470.

(P:470.465.) Quare si ponamus circulum adhuc alium cum quadrato similiter circumscripto; quoniam ex Theorematis 2 Part: 1. demonstratione constat (P:135), omnem semicirculum esse alteri similem; et AB ad BH utrobique est ut 1 ad 2, adeoque rectangulum unum alteri simile (P:175); inde generabitur sphaera, et cylindrus alteri similis (P:119.120). Cum adeo ea utrobique coincidant, quae a se invicem distingui debebat, quod in utroque casu gignitur (P:24 Arithm.); erit cylindrus unus ad suam sphaeram, ut alter ad suam sphaeram (P:132 Arith). Habet ergo rationem triplicatam diametrorum (P:575) hoc est, ut cubi eorundem existunt (P:259 Arith). Q. e. d.

Theorema XXXVII.

580. Aequalia parallelepipeda, prismata

ſimatae, cylindri, coni, et pyramides reciprocant baſes, et altitudines.

Demonſtratio.

Si enim haec corpora fuerint aequalia, facta ex baſibus in altitudinem aequalia ſunt (§. 530 ...). Quamobrem altitudo corporis A eſt ad altitudinem alterius B ut reciproca baſis ipſius B ad baſin ipſius A (§. 229 Arithm). Q. e. d.

Theorema XXXVIII.

Tab. XIV. F: 1... n: ...

581. Cylindrus, cujus altitudo aequalis eſt diametro baſeos, eſt ad cubum diametri ut 785 ad 1000.

Demonſtratio.

Sit diameter AB 100, erit baſis 7850 (§. 419). Et quoniam altitudo DC = AB, ... ſolidibas cylindri 785000 (§. 541). Sed cubus diametri AB = 1000000 (§. 531). Ergo Cylindrus ad cubum diametri ut 785 ad 1000 (§. 181 Arithm). Q. e. d.

Caput VI

Caput VI.

De Stereometria Doliorum.

Problema XXVII.

552. Virgulam construere, cujus ope facile difficulter invenitur numerus mensurarum fluidi alicujus e: gr: vini, cerevisiae &c in vase cylindrico contenti.

Resolutio.

Tab. XIV. F: 172 n: 1. 2. 1. Diameter vasis cylindrici ABDE, uni mensurae, qua ad fluida mensuranda utimur aequali, AB jungatur lineae indefinitae A r ad angulos rectos (§. 249).

2. Ex A transferatur in r recta A 1 rectae AB aequalis; erit B 1 diameter vasis, quod duas mensuras capit, sed eandem cum vase priori altitudinem habet.

3. Fiat A 2 = B 1, erit B 2 diameter vasis tres mensuras capientis, sed ejusdem denuo

nuo altitudinis cum vase, quod non niſi unam capit. Eodem modo inveniuntur diametri vasorum capacio-rum A4, A5, A6, A7 etc.

4. In unum virgulae latus transferantur divisiones inventae A1, A2, A3, A4 etc. in alterum vero altitudo cylindri uni mensurae aequalis, quoties fieri potest. Ita virgula constructa est.

Aliter.

Diametri A2, A3, A4, A5, A6, A7 etc. etiam per calculum inveniri in numeris, et in particulis diametri AB per modum scalae Geometricae divisae (§. 177) centesimis aut millesimis determinari possunt. Sit nempe diameter AB = 1000; erit ejus quadratum 1000000. Ex hujus duplo extracta Radix quadrata (§. 169 Arithm.) erit A2. Si ex triplo, quadruplo, quintuplo etc.

tuplo et Radix extrahatur; prodibunt diametri A3, A4, A5 etc. quem in usum constructa est tabula sequens

Mens:	Diam:	Mens:	Diam:	Mens:	Diam:
1	1.000	17	4.123	33	5.744
2	1.414	18	4.242	34	5.831
3	1.732	19	4.359	35	5.916
4	2.000	20	4.472	36	6.000
5	2.236	21	4.582	37	6.082
6	2.449	22	4.690	38	6.164
7	2.645	23	4.796	39	6.244
8	2.828	24	4.898	40	6.324
9	3.000	25	5.000	41	6.403
10	3.162	26	5.099	42	6.480
11	3.316.	27	5.196	43	6.557
12	3.464	28	5.291	44	6.633
13	3.605	29	5.385	45	6.708
14	3.741	30	5.477	46	6.782
15	3.873	31	5.567	47	6.855
16	4000	32	5.657	48	6.928.

Demon=

Demonſtratio.

Cylindri eandem altitudinem habentes ſunt inter ſe ut quadrata diametrorum (§. 514). Ergo quadratum diametri vaſis duas, tres, quatuor &c menſuras capientis eſt duplum, tri-plum, quadruplum &c quadrati diametri vaſis menſuram non niſi unam capientis. Quare ſi inde radices extrahantur, habebuntur in reſolutione altera diametri ipſae (§. 146 ct.). Quoniam vero in prima AB = A1, erit ipſius B1 quadratum duplum, quadratum ipſius B2 triplum, quadratum ipſius B3 quadruplum &c quadrati ipſius A1 (§. 417). Unde denuo patet eſſe rectas A2, A3, A4 &c diametros vaſorum quaeſitas. Quod ſi itaque has diviſiones ad diametrum vaſis cylindrici applices; illico conſtabit, quot menſuras capiat

vas

vas cylindricum, eandem cum ipso basin, sed altitudinem illius habens, quod unam mensuram capit. Quare si porro ope alterius divisionis in virgula factae investiges, quoties altitudo unius mensurae in altitudine vasis dati contineatur, et hunc numerum quadratum diametri modo inveniendo multiplices; prodibit numerus mensurarum cavitatem vasis dati adimplentium. Q. e. d.

Scholion I.

553. Q. gr. sit quadratum diametri vasis cylindrici 8, altitudo 12; erit numerus mensurarum, quas capit 96.

Scholion II.

554. Altitudo cylindri mensuram unam capientis quo minor assumitur, eo diameter basis fit major. Unde tam ipsa, quam diametri cylindrorum plures mensuras capientium postea facilius in suas minutias subdividuntur.

dividuntur. Bayerus (a) mavult, ut altitudo nonnisi unius digiti assumatur.

Scholion III.

585. Inveniuntur autem diametri vasorum unam, vel plures partes decimas mensurae capientium, si decima, vel plures decimae partes vasis unam mensuram capientis, dividantur per ejus altitudinem, ut habeatur basis cylindri circularis (§. 541): etenim hac data diameter habetur per probl. 58 (§. 434). Eodem modo inveniuntur diametri pro scrupulis vasorum duas, et plures mensuras capientium.

Scholion IV.

586. Quodsi altitudo vasis constanter eadem retineatur, diametri pro mensuris integris, earumque partibus decimalibus hac ratione inveniuntur. Sit e. gr. diameter unius mensurae 1, seu 1000

(a) In der vollkommenen Visierkunst, c. 25. p. 126.

1000 partium decimalium, erit ejus quadratum 1000000: cujus pars decima 100000. Inde extracta radix quadrata 316 continet partes decimales diametri unius mensurae quae conveniunt diametro cylindri decimam mensurae partem continentis, ejusdem tamen cum cylindro integram mensuram capiente altitudinis. Si ex duplo hujus decimae nempe 200000 radix extrahatur, prodit diameter basis $\frac{2}{10}$ unius mensurae capientis 447, et ita porro. Quod si quadrato diametri unius mensurae 1000000 adjicias partem decimam 100000, et ex summa extrahas radicem quadratam 1.049, erit ea diameter vasis, quae capit $1\frac{1}{10}$ mensurae. Ratio patet ex demonstrationem problematis praesentis. Atque sic patet, quomodo virgula stereometrica accuratius construi possit, ubi intervalla

tervalla inter menſuras integras sub=
dividantur in partes decimales.

Diametri pro menſuris integris, et earum partibus decimalibus.							
		3.0	1.732	6.0	2.449	9.0	3.000
0.1	316	1	1.761	1	2.469	1	3.016
2	447	2	1.788	2	2.489	2	3.033
3	548	3	1.816	3	2.509	3	3.049
4	632	4	1.844	4	2.529	4	3.066
5	707	5	1.871	5	2.549	5	3.082
6	775	6	1.897	6	2.569	6	3.098
7	837	7	1.923	7	2.588	7	3.114
8	894	8	1.949	8	2.607	8	3.130
9	949	9	1.975	9	2.626	9	3.146
1.0	1.000	4.0	2.000	7.0	2.645	10.0	3.162
1	1.049	1	2.025	1	2.664	1	3.178
2	1.095	2	2.049	2	2.683	2	3.194
3	1.140	3	2.073	3	2.702	3	3.210
4	1.183	4	2.097	4	2.720	4	3.226
5	1.225	5	2.121	5	2.738	5	3.241
6	1.265	6	2.145	6	2.756	6	3.256
7	1.304	7	2.168	7	2.774	7	3.271
8	1.342	8	2.191	8	2.792	8	3.286
9	1.378	9	2.214	9	2.810	9	3.301
2.0	1.414	5.0	2.236	8.0	2.828	11.0	3.316
1	1.449	1	2.258	1	2.846	1	3.331
2	1.483	2	2.280	2	2.864	2	3.346
3	1.517	3	2.302	3	2.881	3	3.361
4	1.549	4	2.324	4	2.898	4	3.371
5	1.581	5	2.345	5	2.915	5	3.391
6	1.612	6	2.366	6	2.932	6	3.406
7	1.643	7	2.387	7	2.949	7	3.421
8	1.673	8	2.408	8	2.966	8	3.436
9	1.703	9	2.429	9	2.983	9	3.451

Scholion V.

587. Tecum me non monente patet, cylindrorum mensuram hic constitui cylindrum, quemadmodum supra solidorum omnium mensuram assumtus est cubus. Unde, et virgula pithometrica sic constructa virga cylindrica appellatur. Similiter hic circulorum mensura constituitur circulus, sicuti supra omnium superficierum mensura quadratum.

Problema XXVIII.

588. Invenire soliditatem dolii, hoc est, determinare numerum mensurarum, quas capit.

Resolutio.

Tab: XIV. F: 173. 1. Virga pithometrica vi prob: praec: (§: 583) decenter applicata, explorentur tam Longitudo Dolii AC, quam utraque diameter GH, et AB.

2. Cum experientia non invita, rigo-re

re licet Geometrico repugnante, Dolium pro cylindro habeatur, cujus basis inter fundum, et ventrem Dolii media aequidifferens; inter AB et GH quaeratur numerus medius aequidifferens (§. 348 Arithm) qui Diametri aequata dici solet.

3. Numerus inventus ^quadratum multiplicetur per longitudinem Dolii AC, erit facto vi demonstrationis problem: praeced. (§. 583) numerus mensurarum, quas capit Dolium.

Sit e: gr: AB = 8	AC = 15
GH = 12	$\frac{1}{2}$(AB + G [illegible]
erit AB + GH = 20	capac: dolii. 1500
$\frac{1}{2}$(AB + GH) = 10	mens:

Scholion I.

589. Quodsi contingat, fundum non esse perfecte circularem, sed unam diametrum esse altera longiorem, utramque

diametrum

diametrum metiri, et earum semissum-
mam pro diametro circuli fundo Do-
lii aequalis assumere solet.

Scholion II.

590. Tabulae, ex quibus inter se coassa-
tis Dolia construi solent, ultra fundum
prominent. Pro longitudine igitur
Dolii non assumenda est FE, sed AC,
quae habetur, si quantitas prominen-
tiae tabularum, una cum ejus dimi-
dio, cui fundo crassities aequalis sup-
ponitur, a recta FE utrinque sub-
~~[illegible]~~ trahitur. Solent autem quan-
titates subtrahendas creta notare utrin-
que in ipsa superficie Dolii, e.gr. in
K, si quantitas subtrahenda fuerit IK.
Cum in finem peculiarem regulam
parant, in partes minutas aequales di-
visam.

Scholion III.

591. Alios decipiunt ex tabulis in me-
dio

dis gracilibus, circa extrema crassis et orbibus ligneis pariter crassis Dolia construuntur: quae fraus non facile detegitur.

Scholion IV.

592. Possemus equidem soliditatem cavitatis Dolii eodem modo explorare, quo supra corpora cava metiri docuimus (§. 503). Si enim soliditatem unius mensurae divideretur, prodiret Dolii capacitas. Enimvero prolixitas calculi obstat, quo minus ea methodo utantur.

Scholion V.

593. Prostat etiam methodus, qua sine ullo calculo capacitas Dolii invenitur. Utuntur ea in Batavia et variis Germaniae Locis. Sed cum supponat, omnia Dolia esse interse similia, et longitudinem duplam diametri aequatae, hoc est, semissummae diametro-

diametrorum AB, et GH; non tuto' ubique adhibetur. Keplerus (a) illas omnibus praefert reliquis, quia omnes cautelas mensorum in se continet. Vir:ga enim virgulis introrsum immissa eliminat crassitiem tabularum, cir:culorum, qui vincula sunt, viminea:que, quibus circuli lignei stringun:tur. Eliminat et excessum margi:num, quorum in crenis haerent orbes. Hoc autem ratio alia mensurandi una, eademque opera praestare nul:la potest. Unde ad privatorum se:curitatem, fraudesque eliminandas suadet = ut lex illa Dolii construendi, quae tertia parte longitudinis tabularum jubet describere circulum orbium ligneorum magistratuum autoritate, diligentiaque conserve:tur, poenisque, et proscriptione va:sorum,

---

(a) In Stereometria Doliorum vinariorum part: 3. art: 3. §: n: 3.

sorum, quae tam figuram non habens vindicetur. = Ea nimirum proportio in Doliis Austriacis observatur.

Scholion VI.

594. Sunt, qui assumunt, Dolium ex duobus Conis truncatis componi, et ejus soliditatem (probl: 20 §. 544) quaerunt. Alii, cum aliis corporibus Geometricis id comparant. Clavius (b) alia pro duobus conis truncatis, alia pro frusto sphaeroidis Archimedeae habet, quoad prius consentiente, quoad posterius vero contradicente Keplero (c) Clavio tamen assentitur Oughtredus eumque in finem regulam a se inventam proposuit (d). Wallisius pro frusto fusi parabolici habet (e). Enimvero

(b) Geom: pract: lib: 5. c: 10. Tom: II. Oper: f: 145.
(c) In Stereometria part: 2. fol: H. 3.
(d) In Clave Mathematica c: 19. p: m: 103.
(e) In Algebra c: 91. Vol: II. Oper: f: 380.

vero cum methodus propoſita praxi ſa=
tis reſpondeat, reliquae vero, quae ab
Anglis potiſſimum proponuntur (f), ut=
ut ex profundiori Geometria derivatae
moleſtiores ſint, nec ex Elementis Geo=
metriae demonſtrari poſſunt, illa
contenti eſſe poſſumus. Pauca atta=
men adhuc dicemus de Virgae menſu=
rae a Keplero tantopere depraedicta=
tae fabrica.

Problema XXIX

595. Conſtruere virgulam ſtereometri=
cam, qua ſine calculo capacitatem
dolii explorari licet.

Reſolutio et Demonſtratio.

Tab: XIV. F: 172 n: 1. 1. Cum vaſa pro quibus virga haec
paratur, eſſe debeant cylindri, quo=
rum altitudo DC aequalis diametro
AB, ſi fiat ut 785 ad 1000 ita ſoli=
ditas unius menſurae ad numerum
quatum

(f) Vid. The general Gauger by Mr. Dougar=
ty p: 141, et seqq.

quartum proportionalem (per probl. 29 §. 302 Arith.) inveniendum; reperietur cubus diametri cylindri unam mensuram capientis (§. 581).

2. Inde ergo si extrahatur radix cubica (§. 155 Arith.), prodibit diameter vasis cylindrici mensuram unam capientis.

3. Jam cum vas illud habeat altitudinem AE, vel CD diametro AB aequalem, et diagonalis BE assumatur pro indice capacitatis (per hypoth.), si ex duplo quadrati diametri modo inventae AB extrahatur radix (§. 139 Arith.), prodibit index vasis BE mensuram unam capientis (§. 417).

4. Ut porro inveniantur diagonales similium vasorum, quae capiunt mensuras duas, tres, quatuor, et tenendum est, ea esse ut cubos diametrorum (§. 578), consequenter etiam ob similitudinem triangulorum, quale ABE, (§. 173) ut

cubos

cubos diagonalium (§. 16; et §. 260 Arith.).
Quare si diagonalis vaſis unam men-
ſuram capientis concipiatur in 1000.
partes diviſa, et ex cubo 1000000000,
duplo 2000000000, triplo 3000000000,
quadruplo 4000000000 &c extrahantur
radices cubicae (§. 282 Arith.) prodi-
bunt diagonales vaſorum, quae duas,
tres, quatuor &c menſuras capiunt.

5. Denique longitudo diagonalis pri-
mae transferatur in virgulam, et una di-
vidatur in 1000. partes aequales (§. 178):
ita enim ex parata hac ſcala particu-
las milleſimas diagonalibus reliquis
competentes in virgulam transferre licet.

Quoniam itaque Dolium in prae-
ſente caſu habetur pro cylindro gemi-
Tab: XIV F. 173 no, cujus altitudo aequalis eſt ſemiſum-
mae diametrorum orbis AB et ventris
GH, eſtque FB = $\frac{1}{2}$(AB+GH), adeoque
GB diagonalis in cylindro, cujus diame-
ter

ter semisumma diametrorum AB, et GH; capacitas ejus statim innotescet, si orificium G virgula usque ad B detrudatur. Q. e. i. et D.

Scholion I.

596. Constructioni virgulae itaque inserviet tabula sequens.

Mens:	Diag:	Mens:	Diag:	Mens:	Diag:	Mens:	Diag:
1	1000	16	2519	31	3141	46	3583
2	1259	17	2571	32	3174	47	3608
3	1442	18	2620	33	3207	48	3634
4	1587	19	2668	34	3239	49	3659
5	1709	20	2714	35	3271	50	3683
6	1817	21	[illegible]	36	3301	51	3708
7	1912	22	[illegible]	37	3332	52	3732
8	2000	23	2843	38	3361	53	3756
9	2080	24	2884	39	3391	54	3779
10	2154	25	2924	40	3419	55	3802
11	2223	26	2962	41	3448	56	3825
12	2289	27	3000	42	3476	57	3848
13	2351	28	3036	43	3503	58	3870
14	2410	29	3072	44	3530	59	3892
15	2466	30	3107	45	3556	60	3914

Scholion II

Scholion II.

597. Virgula haec cubica appellari solet, quaemadmodum praecedens cylindrica. Et facile ad alia dolia similia construitur, in quibus longitudo dimidia GF fuerit ad diametrum aequatam FB in quacunque ratione, modo in cylindro unam mensuram capiente altitudo AE ad diametrum AB in eadem fuerit.

Problema XXX.

598. Virgulam pythometricam construere ad determinandam quantitatem fluidi in Dolio non pleno.

Resolutio.

1. Assumatur Dolium aqua plenum, cujus capacitas jam cognita, et numerus mensurarum e: gr: 180 aut numerum alium minorem, vel majorem dividatur, prout Dolii capacitatem in partes majores, vel minores dividi commodum visum fuerit.

2. Dolio

2. Dolio beneficio libellae Q: ita collo: T: V: cato, ut axis ejus sit horizonti paralle: T: 51. lus, virga ff orificium venoris intruda: tur, donec fundum Dolii attingas.

3. Ea quantitate fluidi ex Dolio emissa, quae numero mensurarum ff divisionem paulo ante n: 1. inventa respondet, in virgula notetur decrementum altitu: dinis in fluido, quod exprimit totius capacitatis partem vigesimam.

4. Eodem modo notatis decrementum altitudinis, reliquis particulis vigesi: mis quantitatis fluidi in Dolio con: tenti respondens.

5. Horum decrementorum intervallis in una virgulae facie notatis; altera dividitur in partes quotcunque minu: tas inter se aequales, ultra vigesimo: rum intervalla inaequalia continu: andas, e: gr: 100, aut plures.

Ita virga pro Dolio non pleno metiendo constructa

conſtructa eſt.

Scholion.

599. Quodſi in uſum domeſticum pro eodem Dolio iſtiuſmodi virgulam pa=
rare volueris, ſufficit decrementorum intervalla in una ejus facie notari, nec opus eſt faciei alterius in partes aequales diviſione. Decrementa quo=
que altitudinis fluidi notantur nume=
ris, qui quantitati ex Dolio emiſsae reſpondent, e: gr: ſi integrum Dolium capiat 64 menſuras, et una effluxerit, in fine decrementi altitudinis ſcri=
bitur 63.

Problema XXXI.

600. Determinare quantitatem flu=
idi in Dolio non pleno.

Resolutio.

Tab: XIV. F: 173. 1. Inveſtigetur capacitas totius Dolii (§ probl: 28 (§: 588).
2. Dolio libellae beneficio ita collo=

cato

cato, ut axis ejus sit horizonti parallelus, ne scilicet fluidum in una Dolii parte altius sit, quam in altera, virga per problema praecedens (§. 599) parata per orificium Dolii G intrudatur, donec fundum in H attingat.

3. Ea lapsa extracta notetur, quot partes in facie aequalium vino madidae sint.

4. Hinc inferatur: ut numerus partium aequalium in altera virgulae facie profunditati totius Dolii GH respondentium ad numerum similium partium altitudini fluidi LH convenientium, ita numerus earundem partium, quae intervallo scrupulorum vigesimorum congruunt, ad numerum quartum proportionalem per prob: 33 Arith. (§. 302) inveniendum.

5. Capiatur circino intervallo tot partium aequalium in virga, quot numerus

mentus in venbus exprimit, et transferatur in Scala scrupulorum vigesimorum, notetur que eorum numerus, quae ipsi congruunt.

6: Per hunc dividatur numerus mensurarum, quas Dolium integrum capit: quotus erit numerus mensurarum, quas fluidum in Dolio contentum replere potest. Q: e: d:

E: gr: sit GH 160, HL 58, numerus partium partium aequalium, quae intervallo scrupulorum vigesimorum intervallo congruunt, 120, capacitas denique Dolii 128 Mensurarum.

Fiat: 160 — 58 — 120   12
40)   4   3   3   174|43$\frac{1}{2}$
         174   44

Ponamus partibus 43$\frac{1}{2}$ aequalibus respondere in scala inaequalium $\frac{4}{20}$ sive $\frac{1}{5}$. Quodsi itaque 128 per 5 dividas, quotus 25$\frac{3}{5}$ numerum mensurarum indicabit, quas fluidum Dolio contentum replere potest

Scholion.

Scholion.

601. Si Dolia omnia essent similia, per methodum propositam satis accurate inveniretur quantitas fluidi in dolio non pleno: sed in dissimilibus eadem exacte reperiri hac ratione nequit. Nondum autem inventa est methodus, et rigori Geometrico satisfaciens, et praxi respondens. Quam enim Keplerus (a) dedit, ea nec demonstrativa, nec praxi adaptata. Unde neque ipsi satisfacit. Et quamvis aliam postea eidem substituerit (b); satis tamen intricata est. Intricationes adhuc sunt, quas (c) Bayerus, et Dougharty (d) tradunt.

(a) In Stereometria Doliorum f. O. 2. 8.
(b) In dem Auszuge der uralten Messe-Kunst Archimedis P: 58 f: 95.
(c) In Conometriae Mantuanae c: 9. p: 102, et seqq.
(d) The General Gauger p: 164, et seqq.

Finis Elementorum Geometriae.

Index Capitum.

Caput I
De Principiis Geometriae Solidae — — P. 1.

Caput II
De Sectione, et Situ Planorum. P. 15

Caput III
De Solidorum Constructione. P. 37

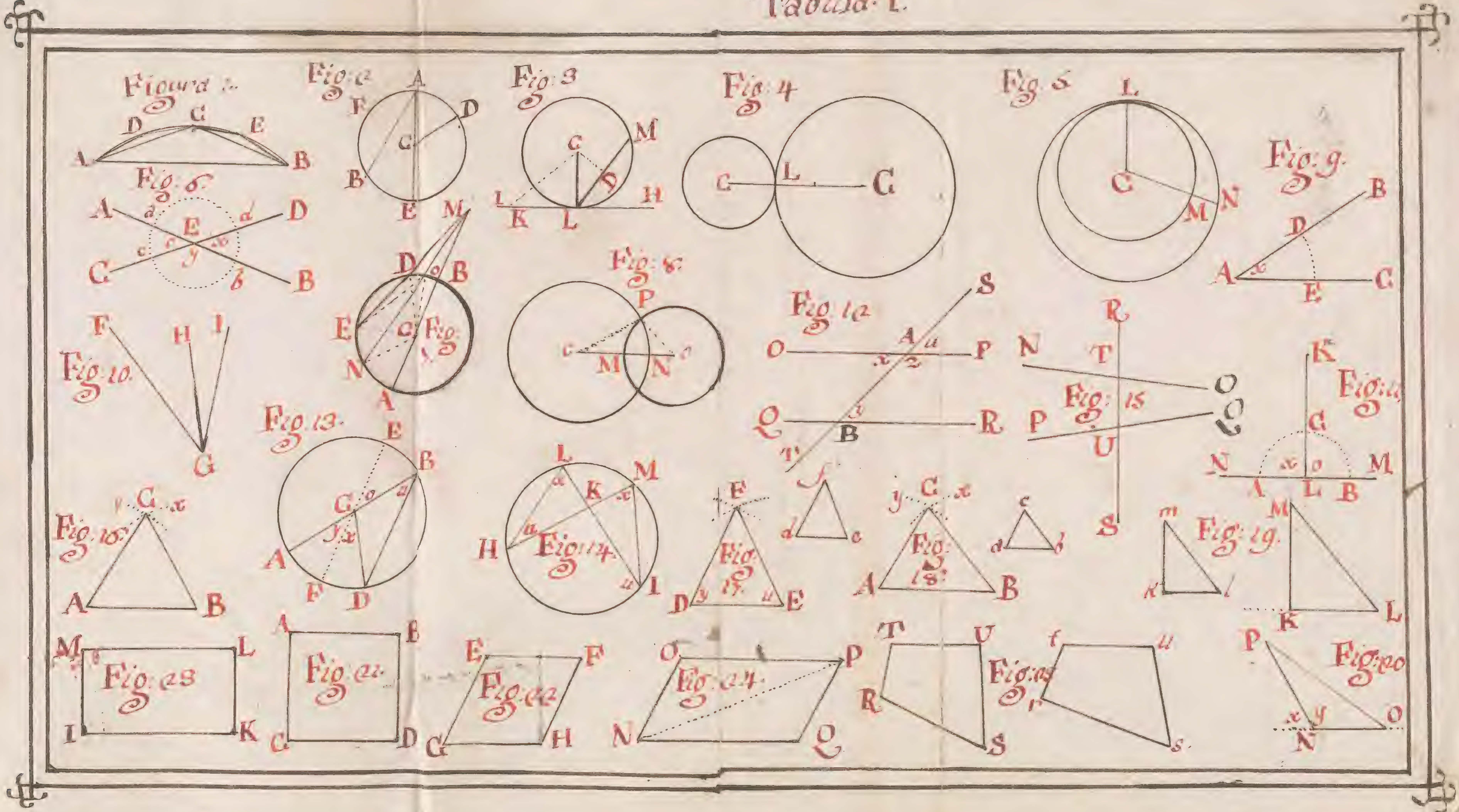
Caput IV
De Dimensione Solidorum. P. 55.

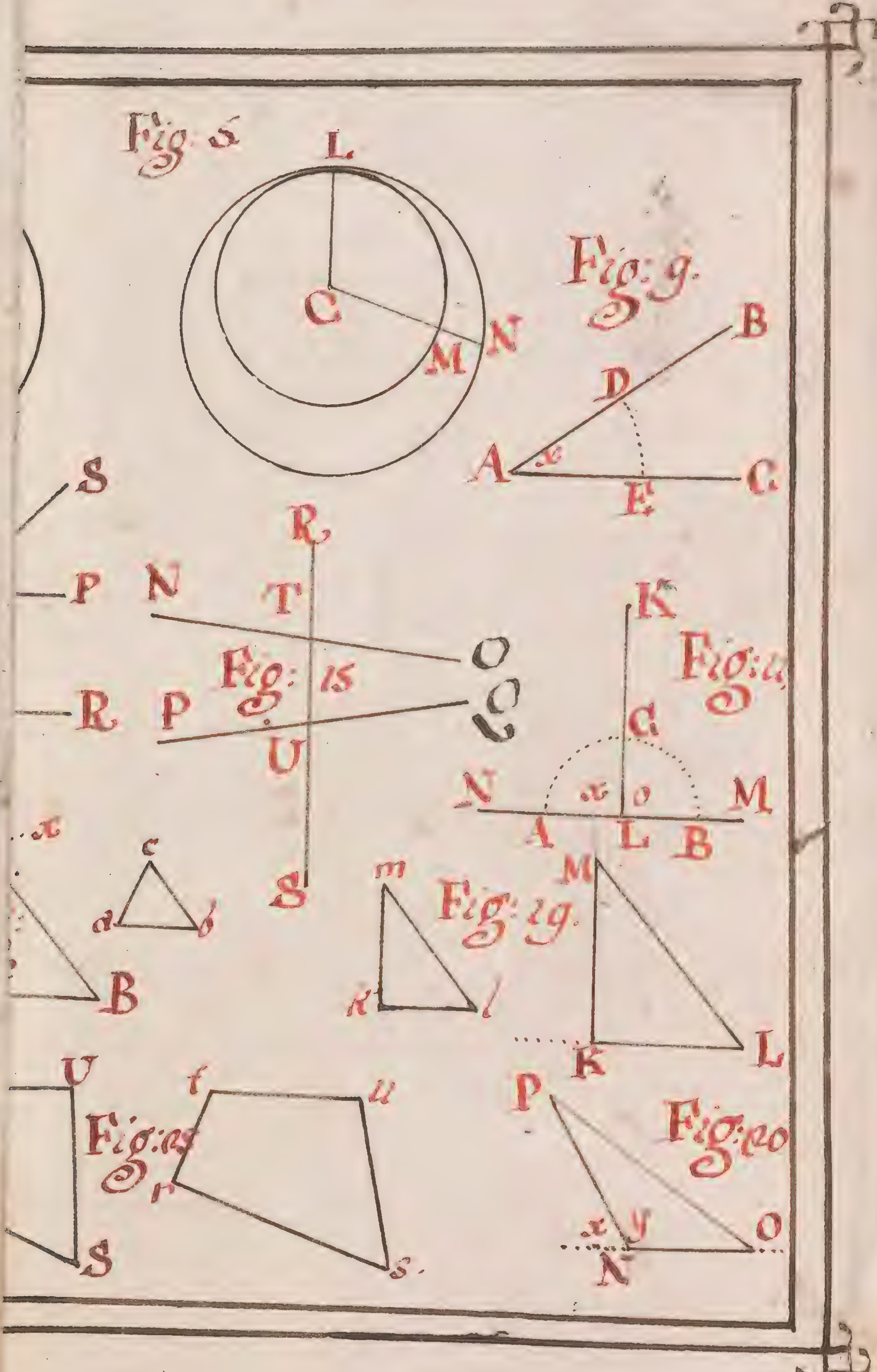
Caput V
De Similitudine, ac Ratione Solidorum. P. 87.

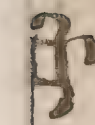
Caput VI
De Stereometria Doliorum. P. 99.

Finis.

Tabula I.


Figura 1.
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15
Fig. 17
Fig. 18
Fig. 19
Fig. 20
Fig. 21
Fig. 22
Fig. 23
Fig. 24


Fig. 5
L
C
M
N
Fig: 9.
B
D
A
x
E
C
S
R
N
T
P
O
Fig: 15
R
P
C
U
S
K
Fig: 11
G
N
x
o
M
A
L
B
x
c
a
b
B
m
Fig: 19.
M
k
l
K
L
U
t
u
P
Fig: 20
S
s
x
y
O
N



Tabula II.

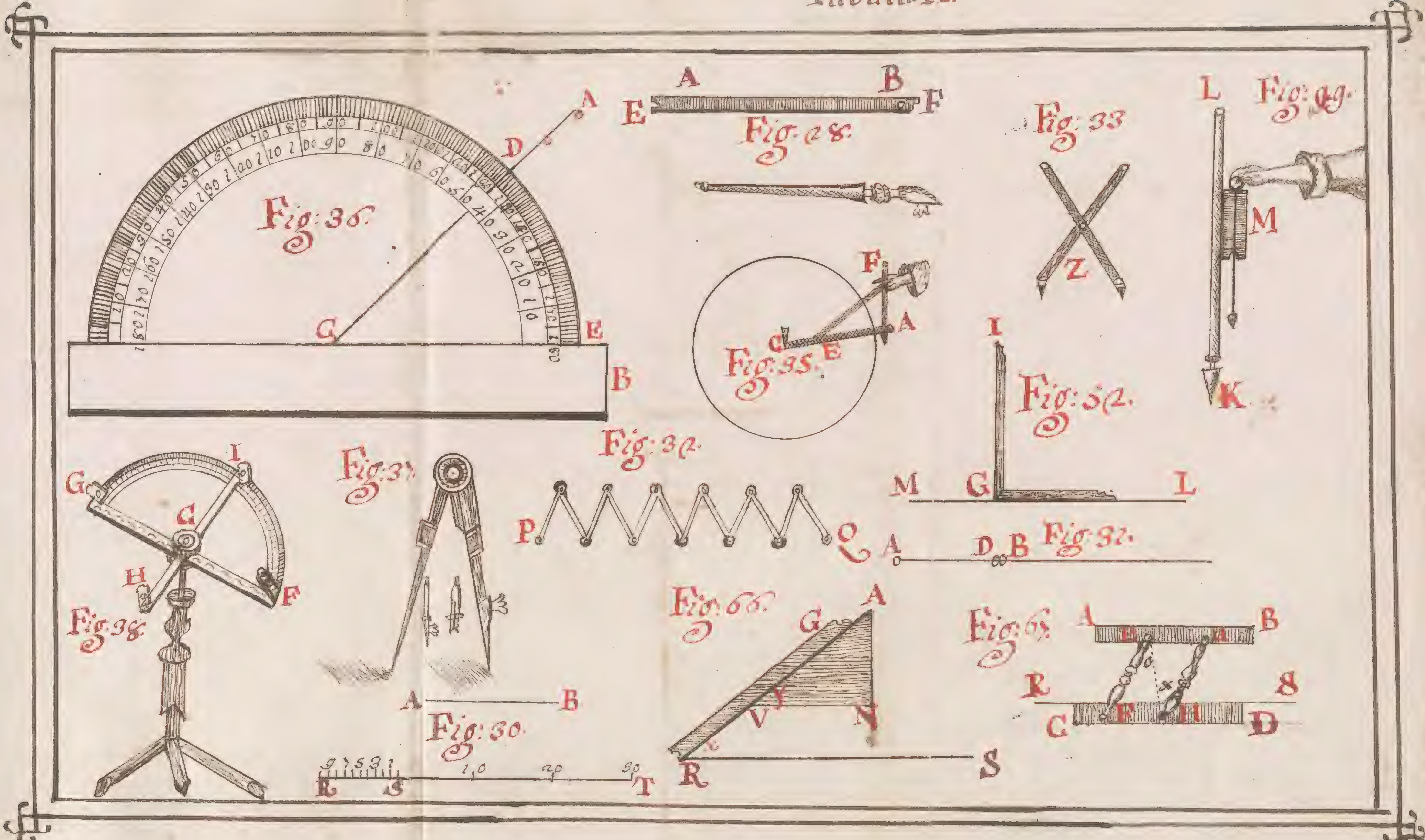
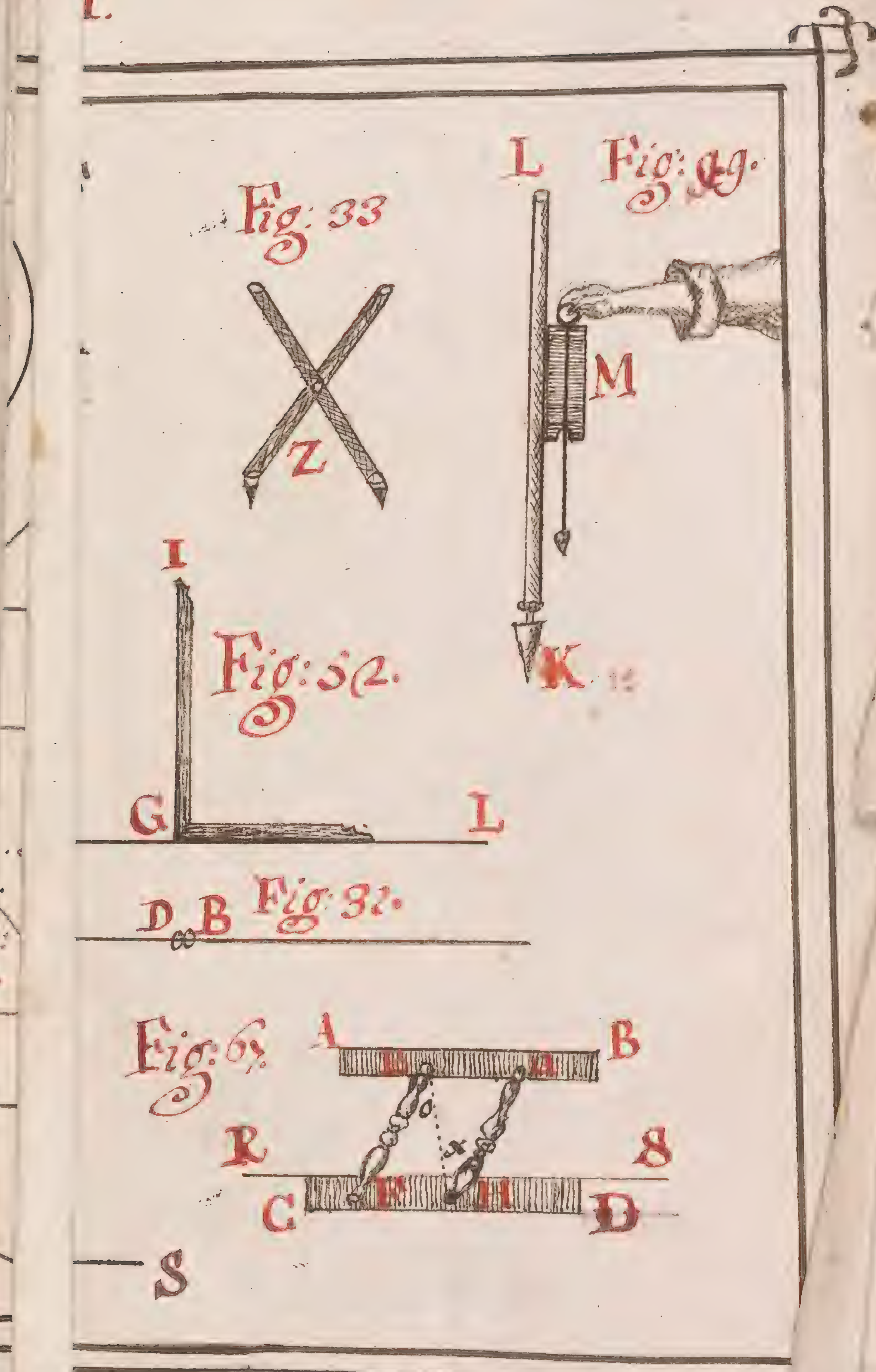
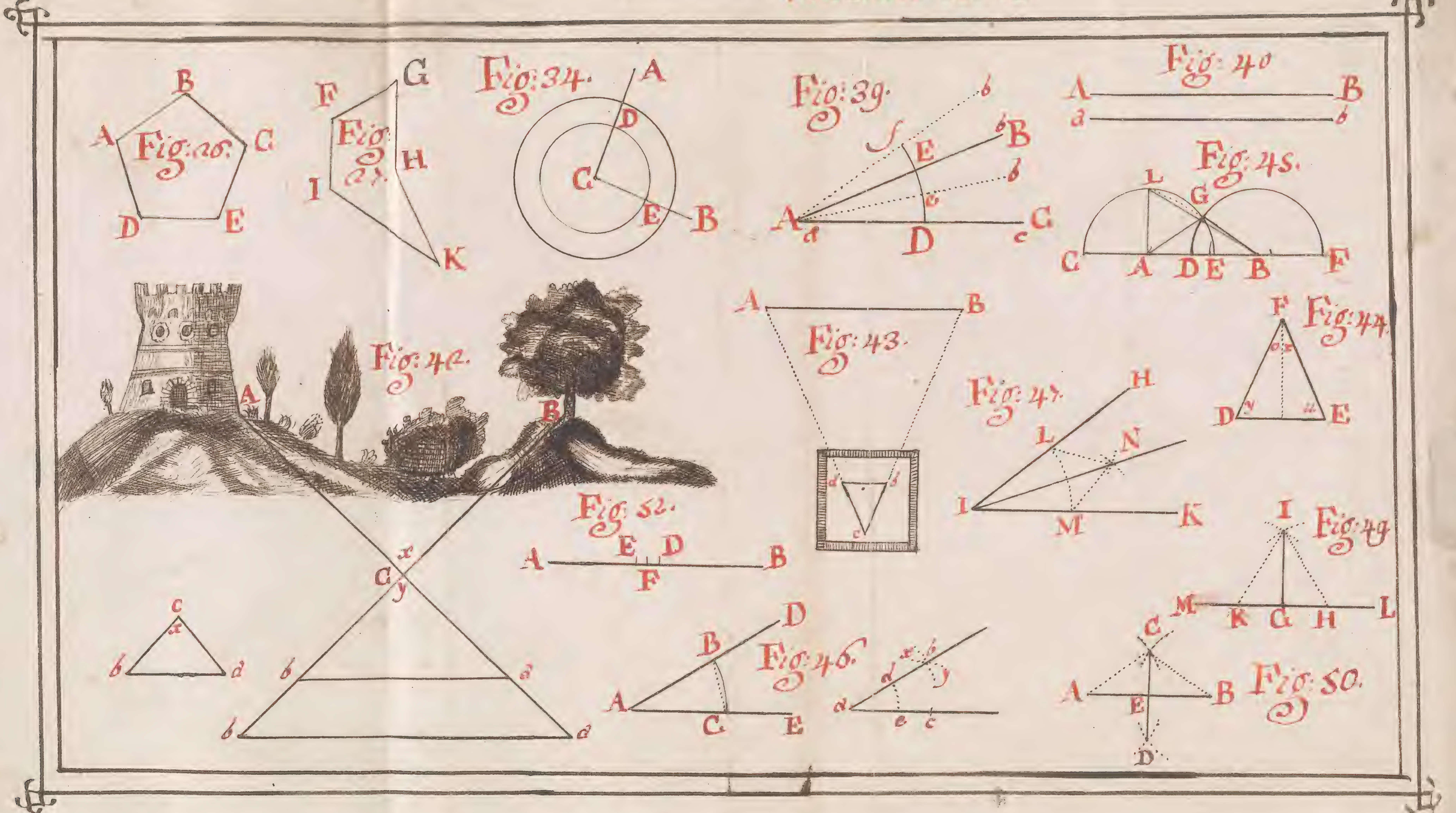
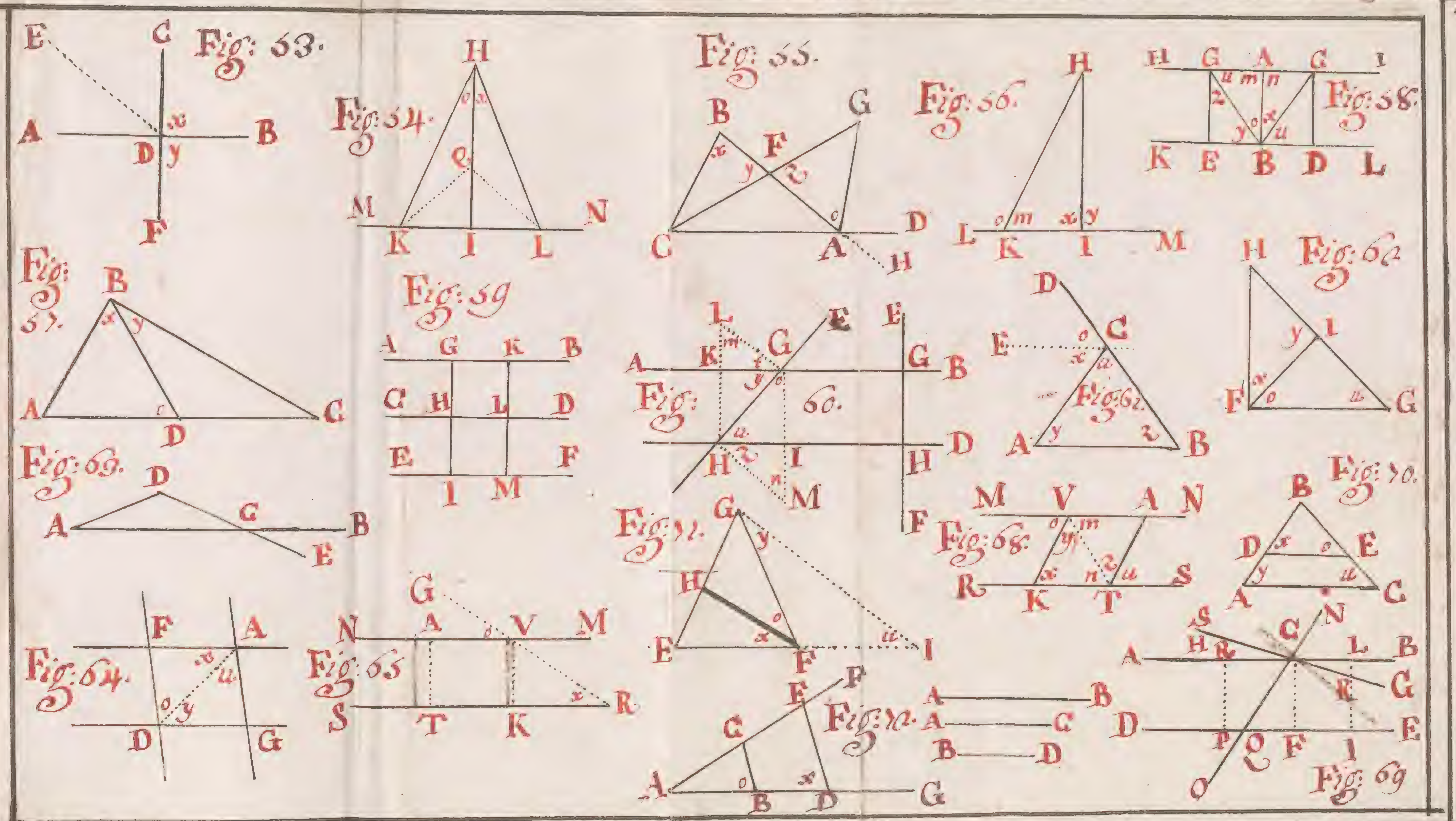
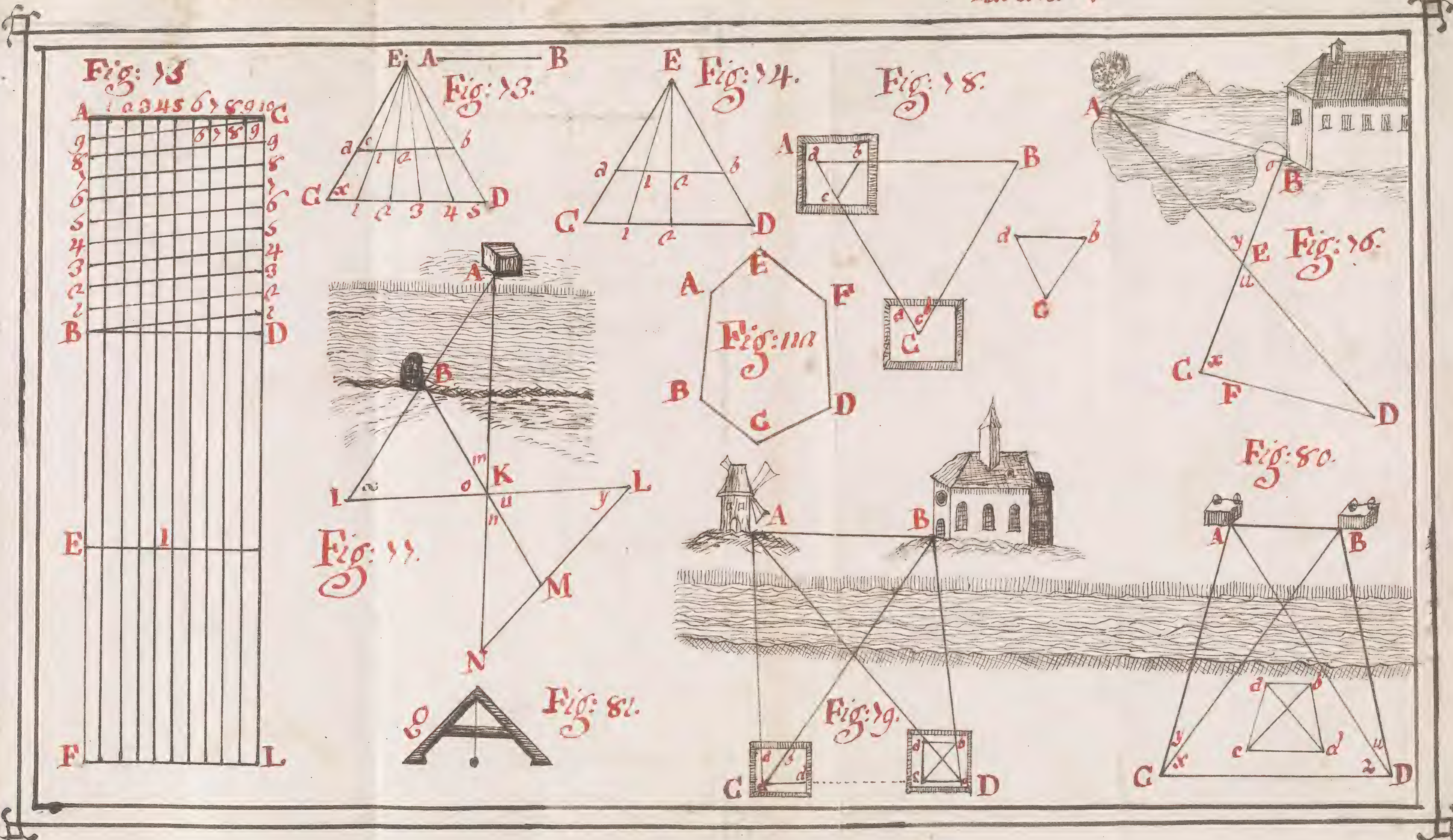


Fig: 36.
Fig: 28.
Fig: 33
Fig: 35.
Fig: 52.
Fig: 32.
Fig: 31.
Fig: 38.
Fig: 30.
Fig: 66.
Fig: 65.

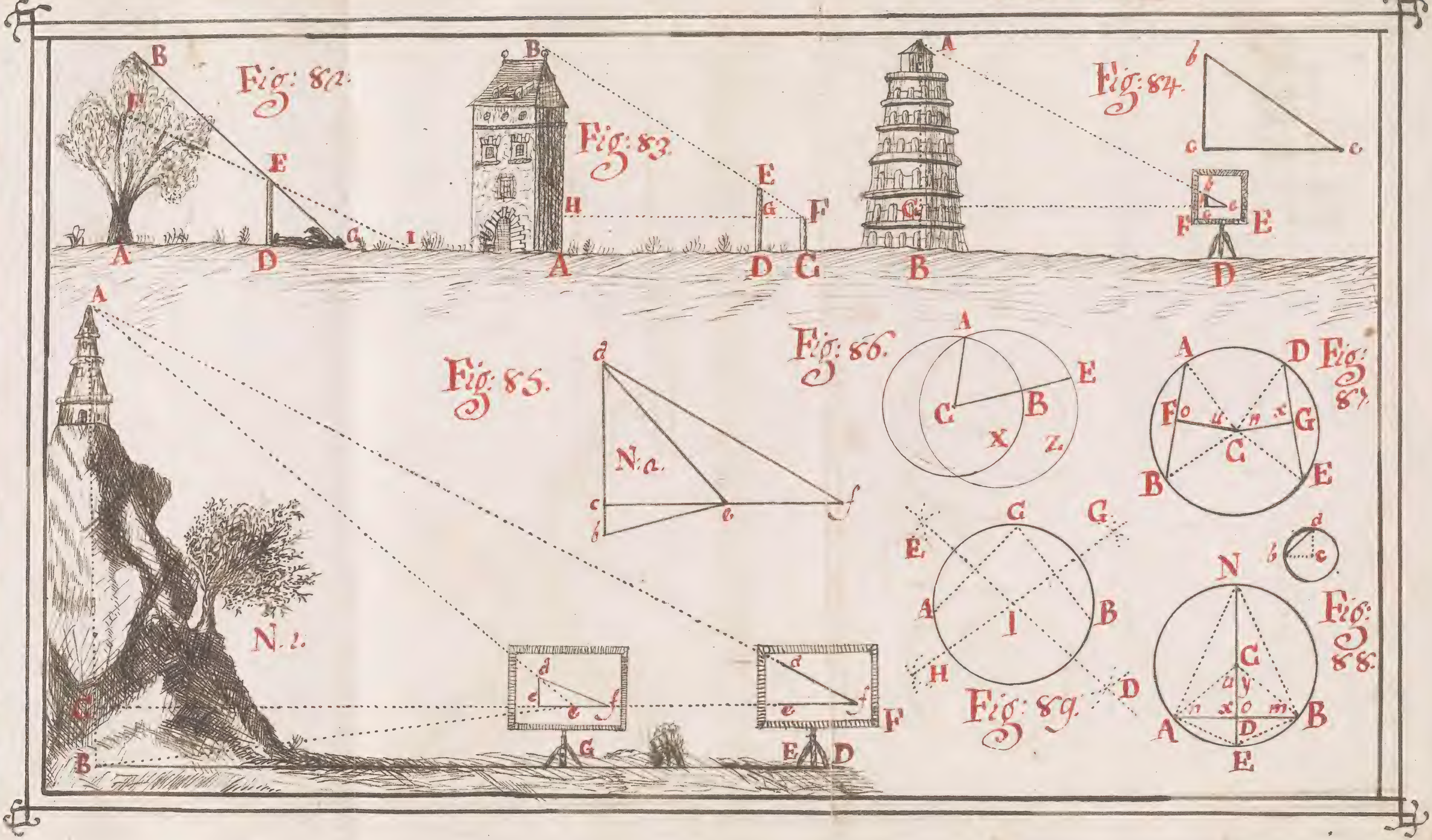

I.
Fig: 49.
L
M
K
Fig: 33
Z
I
Fig: 52.
G
L
D B Fig: 32.
Fig: 67.
A
B
R
8
C
D
S

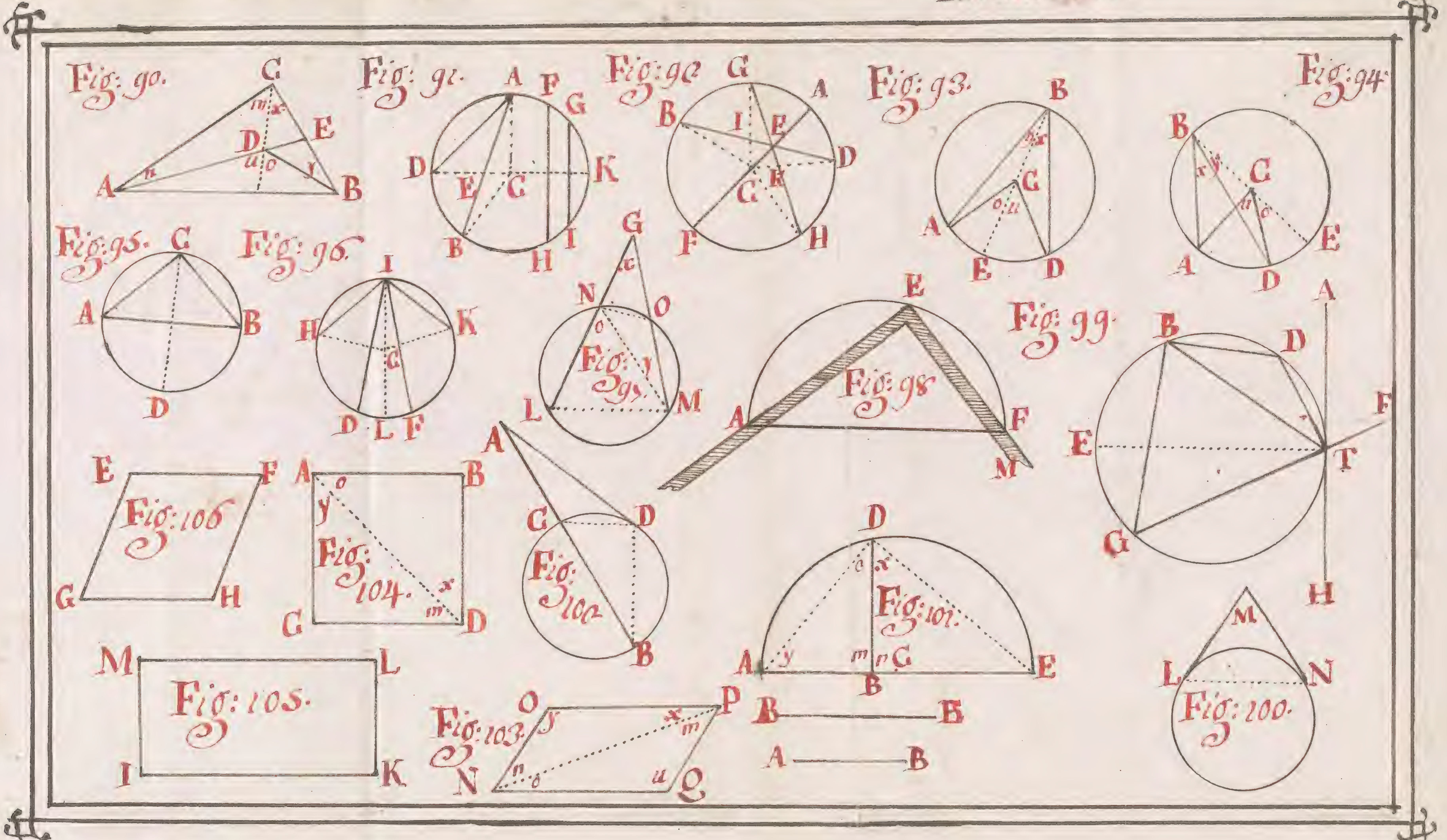

Fig: 26.
Fig: 27.
Fig: 34.
Fig: 39.
Fig: 40
Fig: 45.
Fig: 42.
Fig: 43.
Fig: 44.
Fig: 41.
Fig: 52.
Fig: 49.
Fig: 46.
Fig: 50.

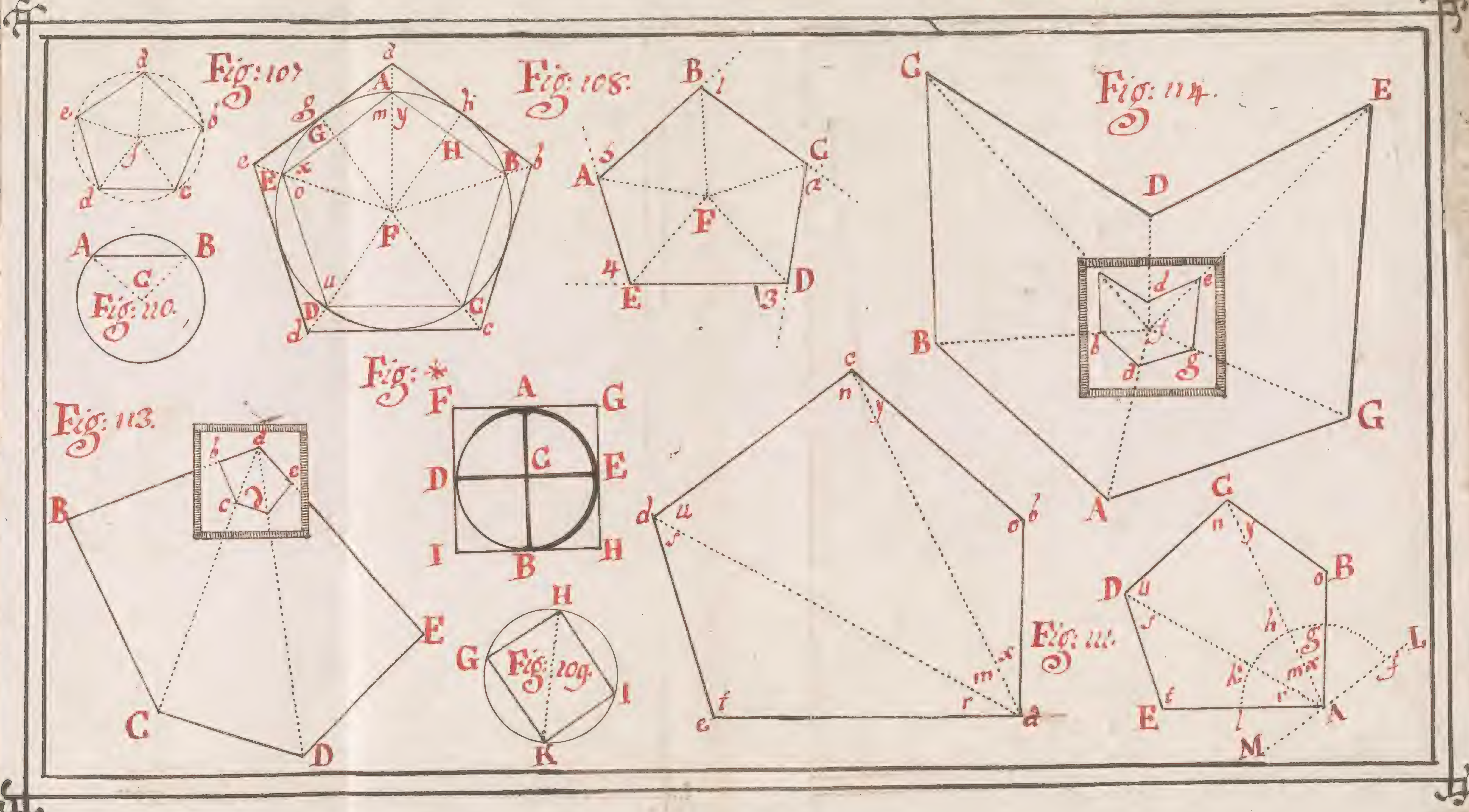

Fig: 53.
Fig: 54.
Fig: 55.
Fig: 56.
Fig: 57.
Fig: 58.
Fig: 59
Fig: 60.
Fig: 61.
Fig: 62
Fig: 63.
Fig: 64.
Fig: 65
Fig: 68.
Fig: 69
Fig: 70.
Fig: 71.
Fig: 72.


Fig: 73.
Fig: 74.
Fig: 78.
Fig: 76.
Fig: 77.
Fig: 80.
Fig: 79.
Fig: 81.

Tabula. VII.




Fig: 90.
Fig: 91.
Fig: 92
Fig: 93.
Fig: 94.
Fig: 95.
Fig: 96.
Fig: 97.
Fig: 98
Fig: 99.
Fig: 100.
Fig: 101.
Fig: 102
Fig: 103.
Fig: 104.
Fig: 105.
Fig: 106

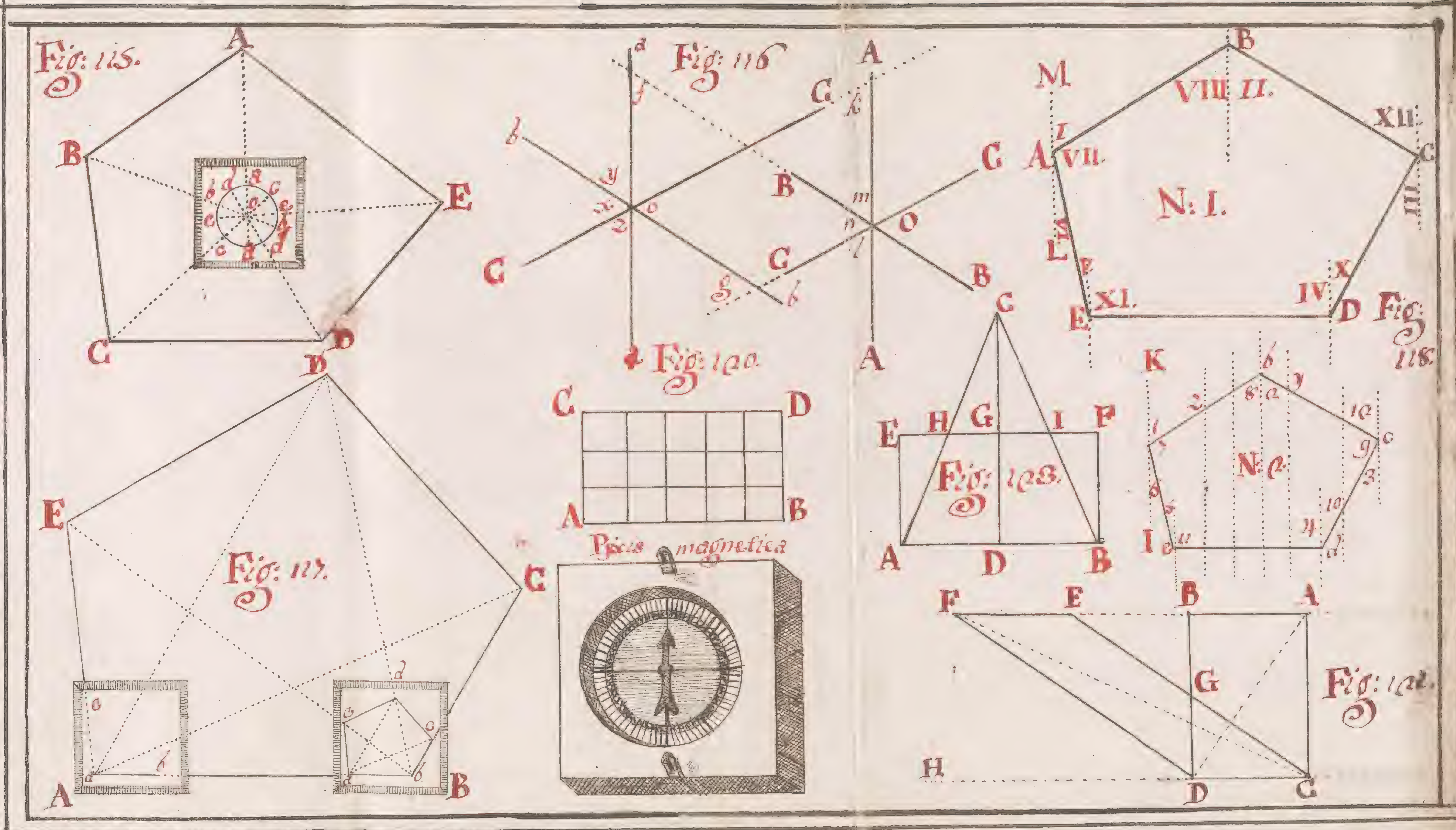

Fig: 107
Fig: 108
Fig: 114
Fig: 110
Fig: *
Fig: 113
Fig: 109
Fig: 111

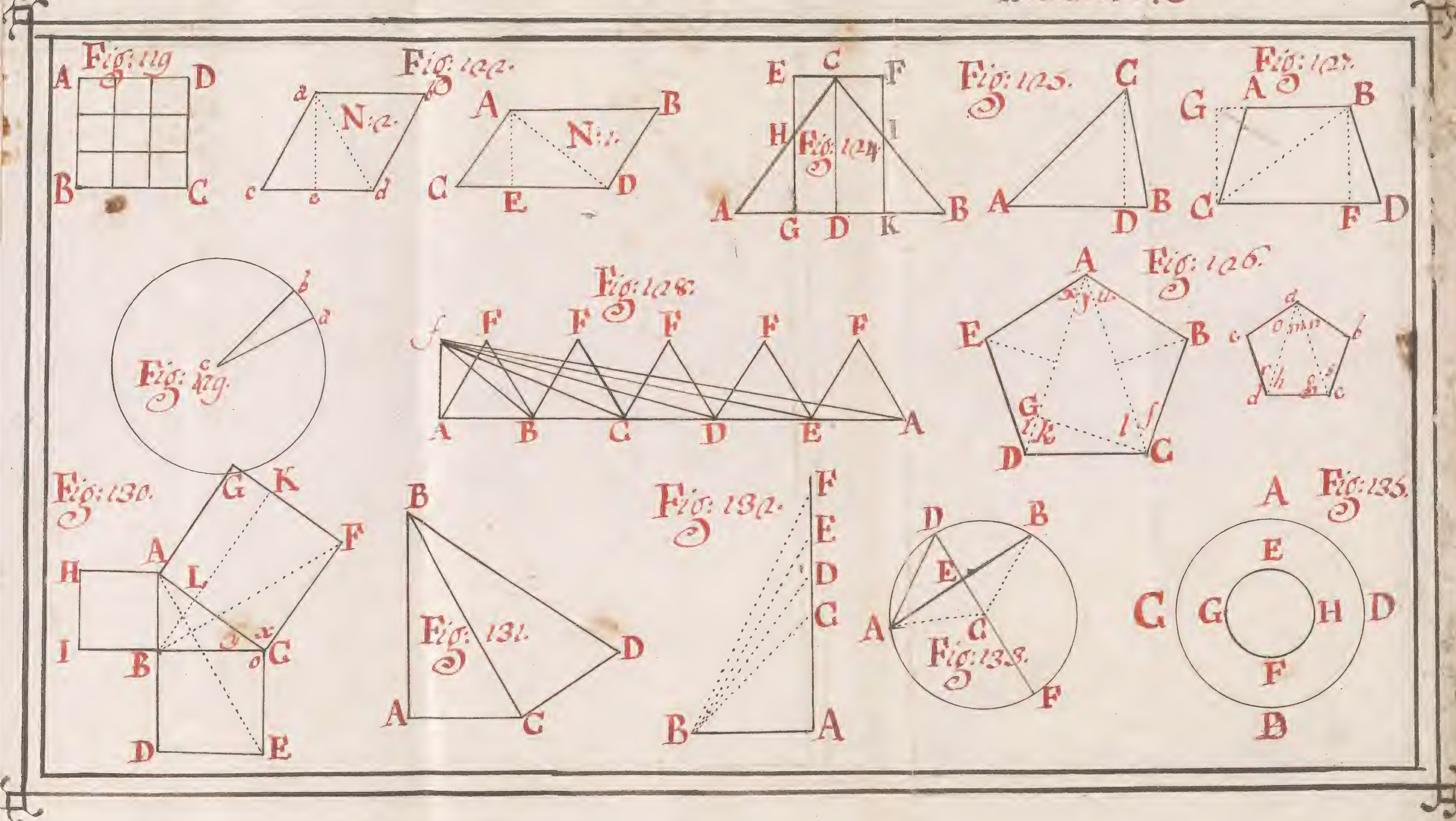
C

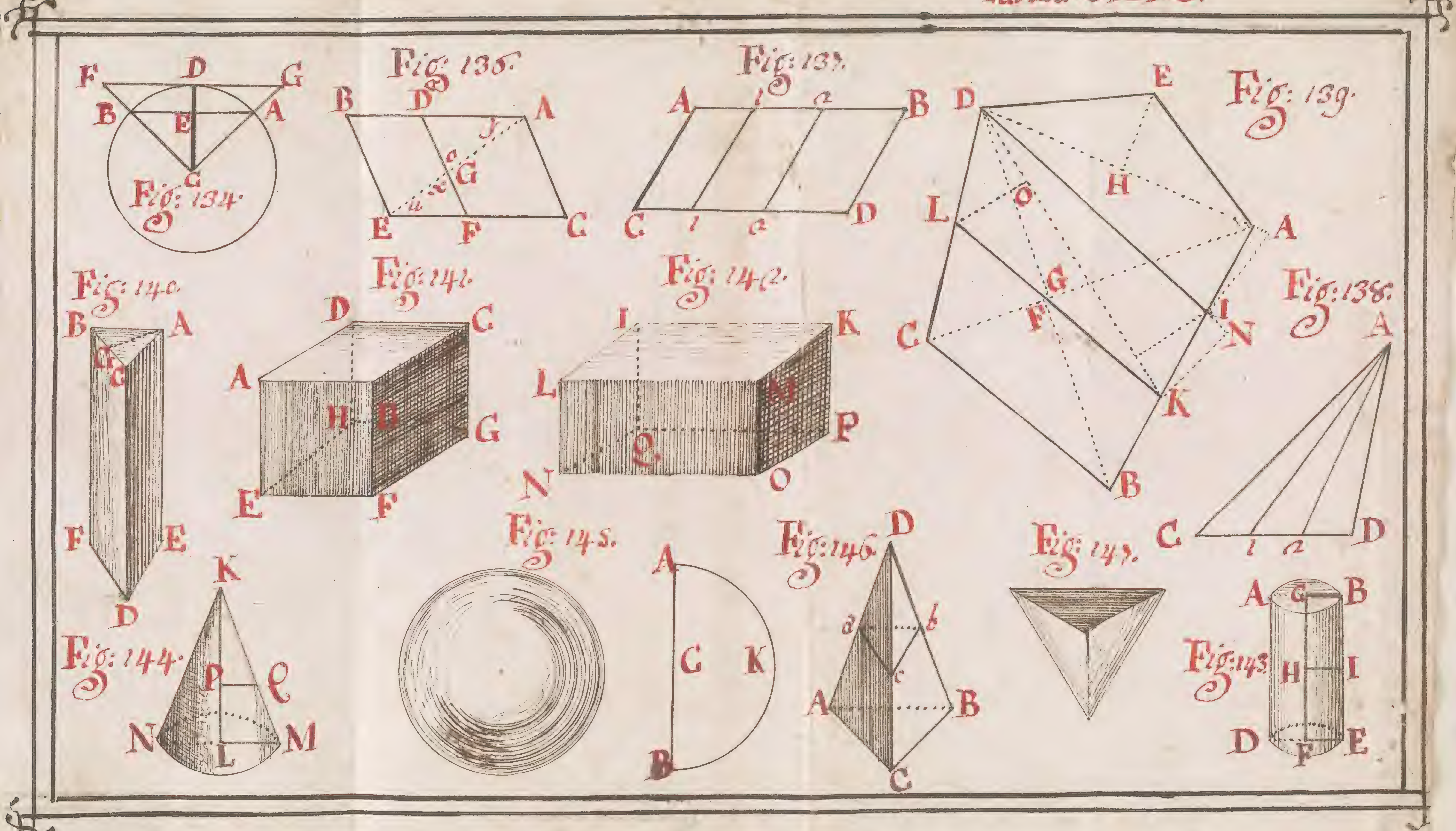
)

&.

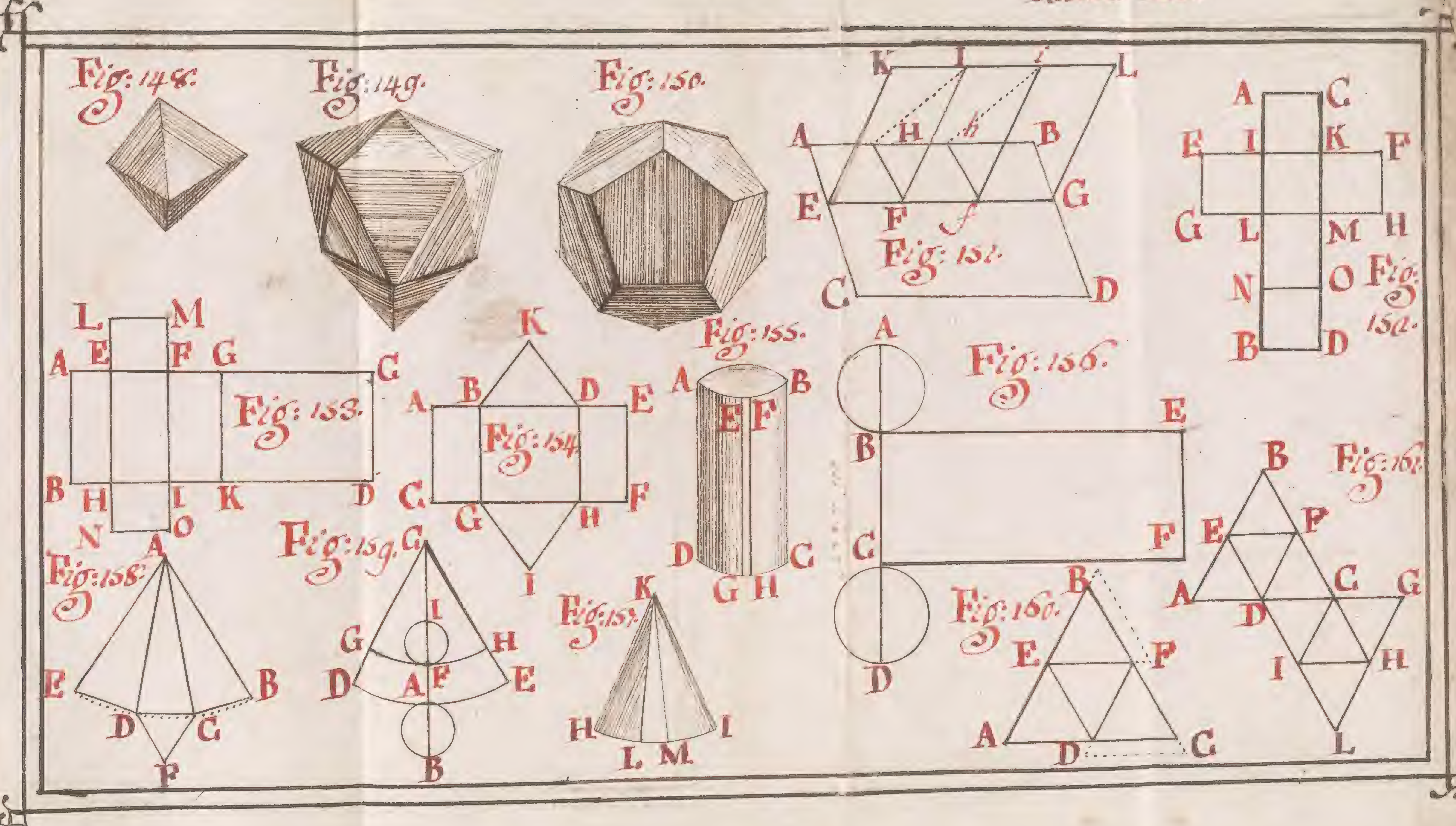
l.


Fig: 115.
Fig: 116
Fig: 117.
Fig: 118.
N: I.
N: 2.
Fig: 120.
Pyxis magnetica
Fig: 123.
Fig: 121.

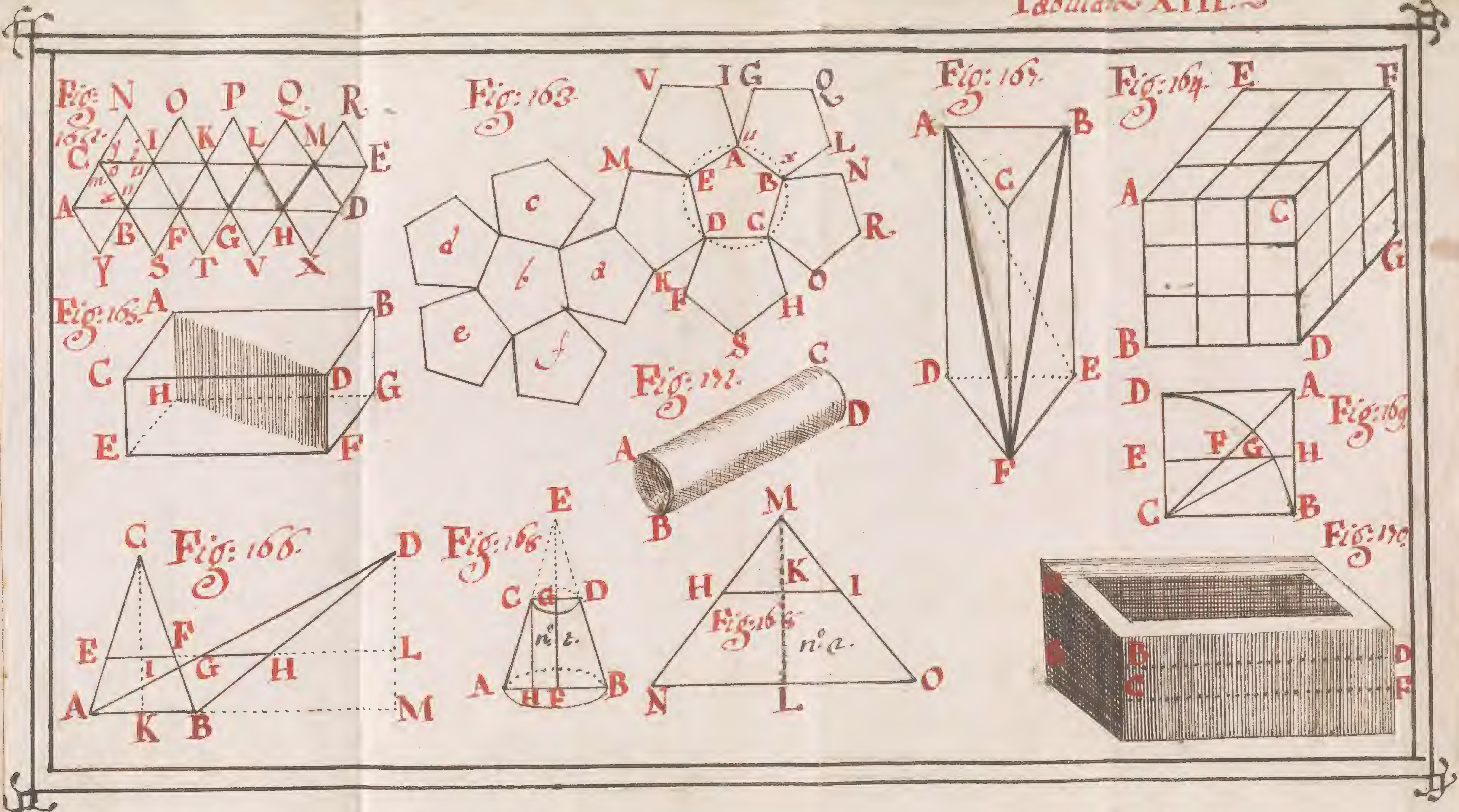

Fig: 119
Fig: 122.
N: 2.
N: 1.
Fig: 124
Fig: 125.
Fig: 127.
Fig: 129.
Fig: 128.
Fig: 126.
Fig: 130.
Fig: 131.
Fig: 132.
Fig: 133.
Fig: 135.

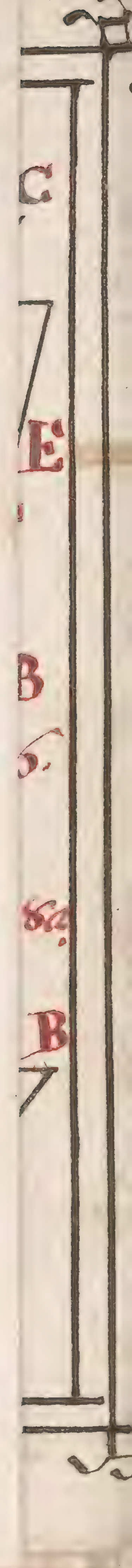

Fig: 134.
F D G B E A G
Fig: 136.
B D A E F C G
Fig: 137.
A B C D
Fig: 139.
D E L O H A G F C I N K B
Fig: 140.
B A F E D
Fig: 141.
D C A H G E F
Fig: 142.
I K L M P N O
Fig: 138.
A C D
Fig: 145.
A C K B
Fig: 146.
D A B C
Fig: 147.
Fig: 144.
K P N L M
Fig: 143.
A B H I D F E




Fig: 148.
Fig: 149.
Fig: 150.
K I i L
A H h B
E F f G
Fig: 151.
C D
A C
E I K F
G L M H
N O
B D
Fig: 152.
L M
A E F G C
Fig: 153.
B H I K D
N O
K
A B D E
Fig: 154.
C G H F
I
Fig: 155.
A B
E F
D C
G H
Fig: 156.
A
E
B
C F
D
Fig: 158.
A
E B
D C
F
Fig: 159.
G
I
G H
D A F E
B
Fig: 157.
K
H I
L M
Fig: 160.
B
E F
A D C
Fig: 161.
B
E F
A C G
D
I H
L

Tabula XIII.




C
E
B
B

Tabula XIV.

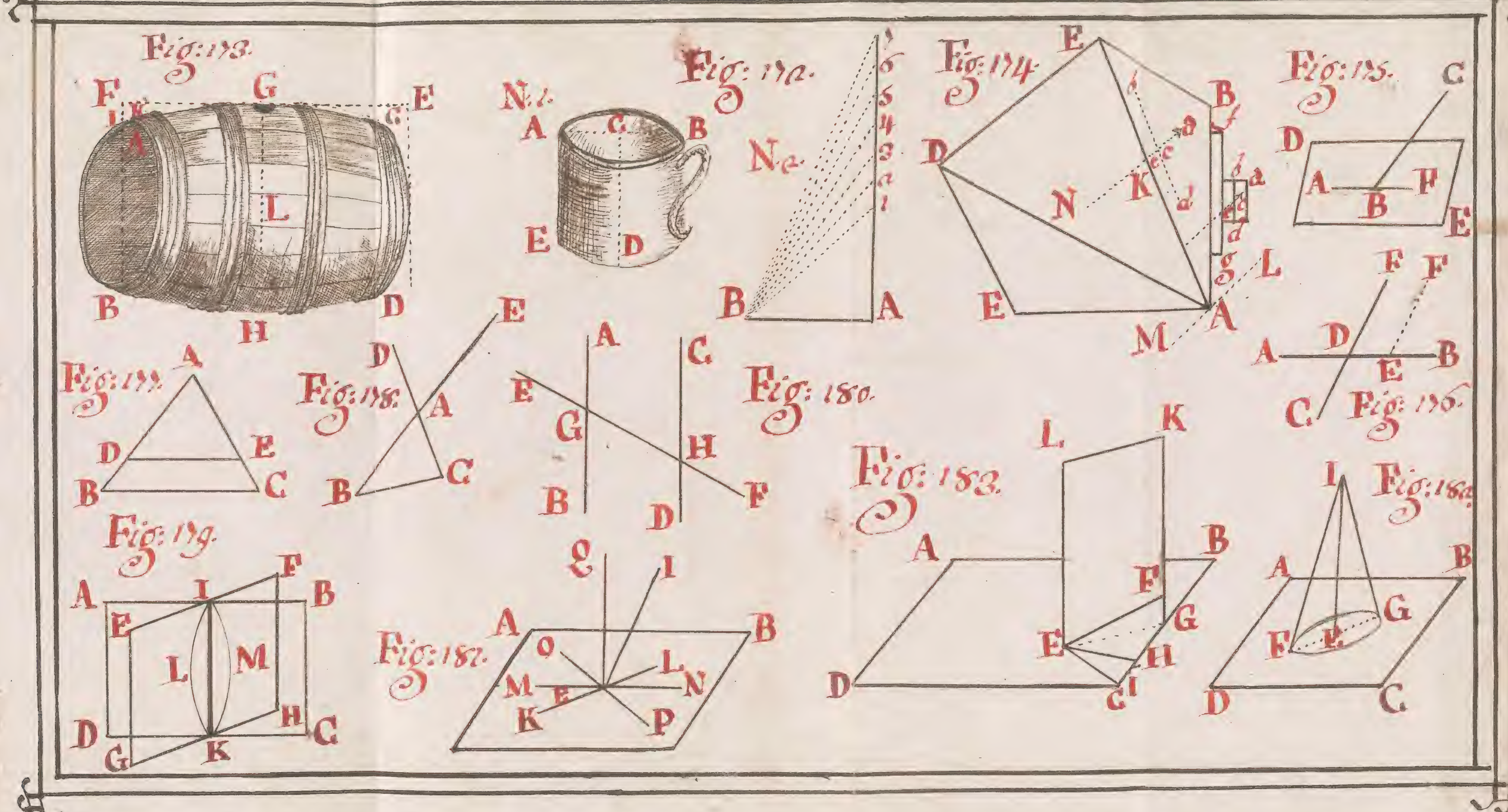


Fig: 173.
Fig: 172.
N. 1.
N. 2.
Fig: 174.
Fig: 175.
Fig: 176.
Fig: 177.
Fig: 178.
Fig: 180.
Fig: 183.
Fig: 184.
Fig: 179.
Fig: 182.

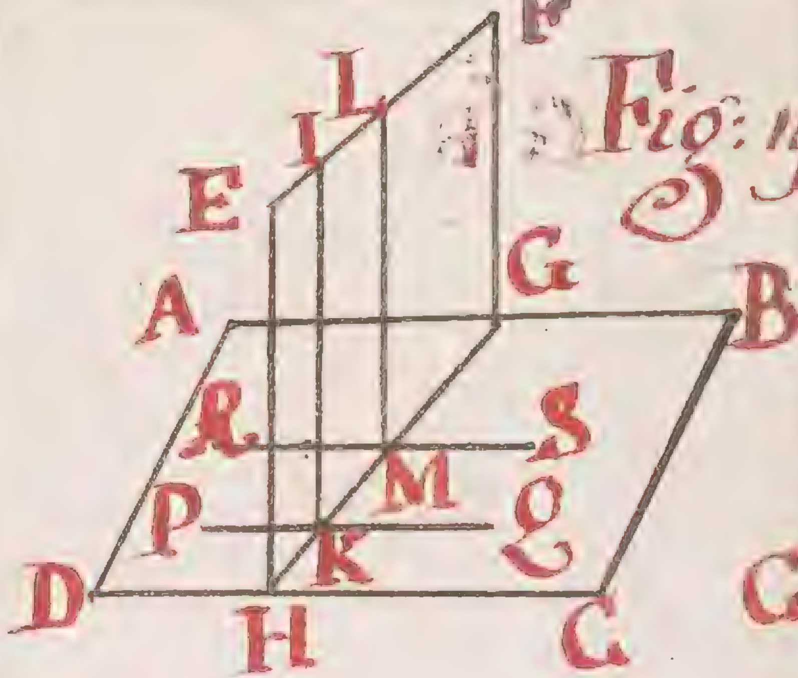


Fig: 190.

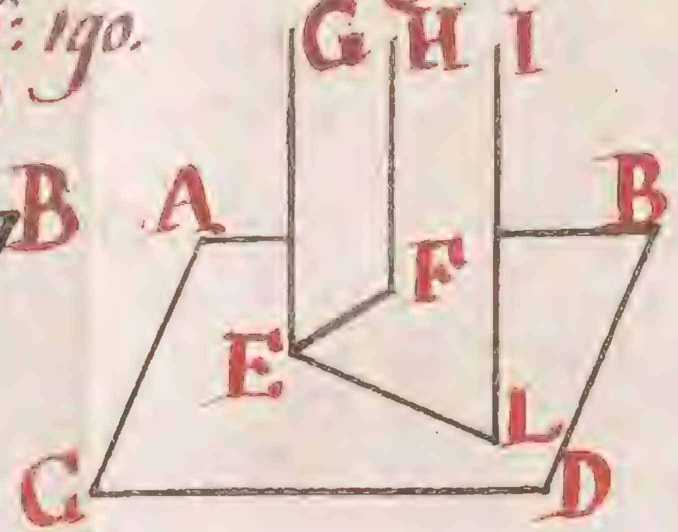
Fig: 184.


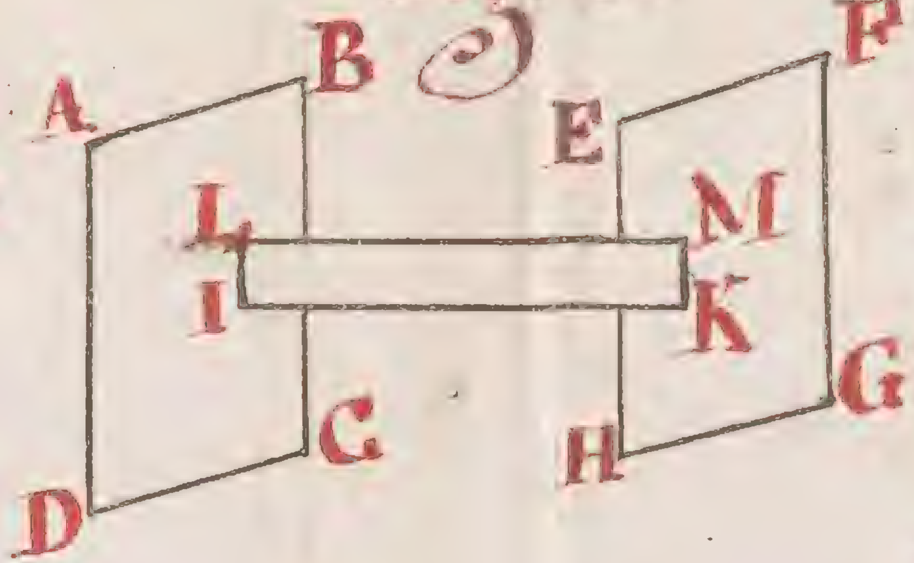
Fig: 186


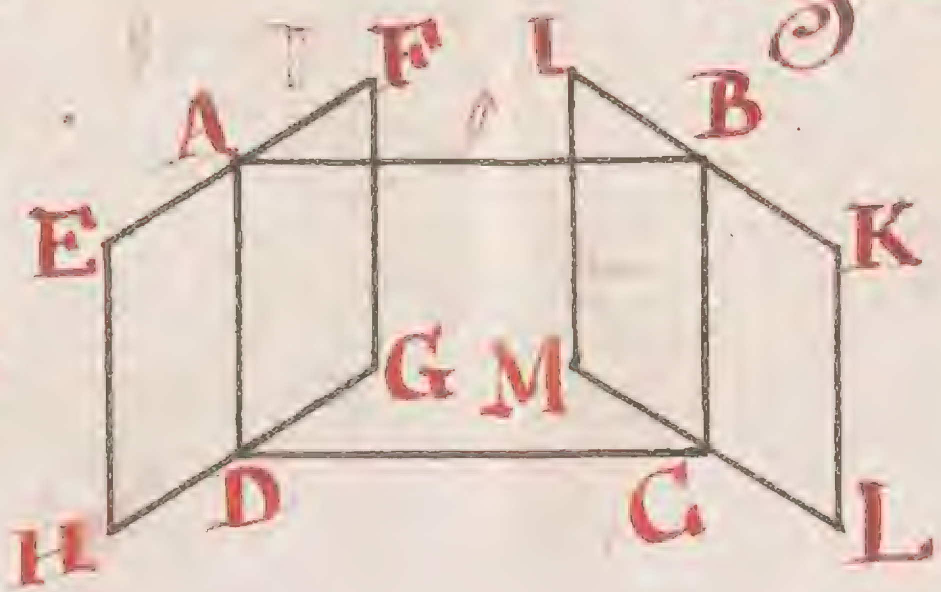
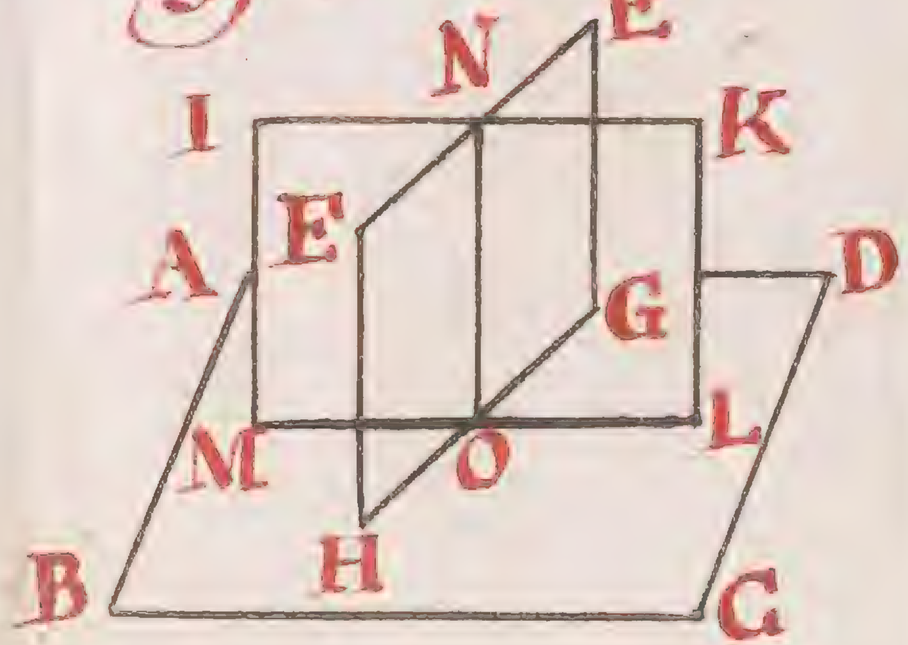
Fig: 187.




Fig: 183.

Fig: 191.


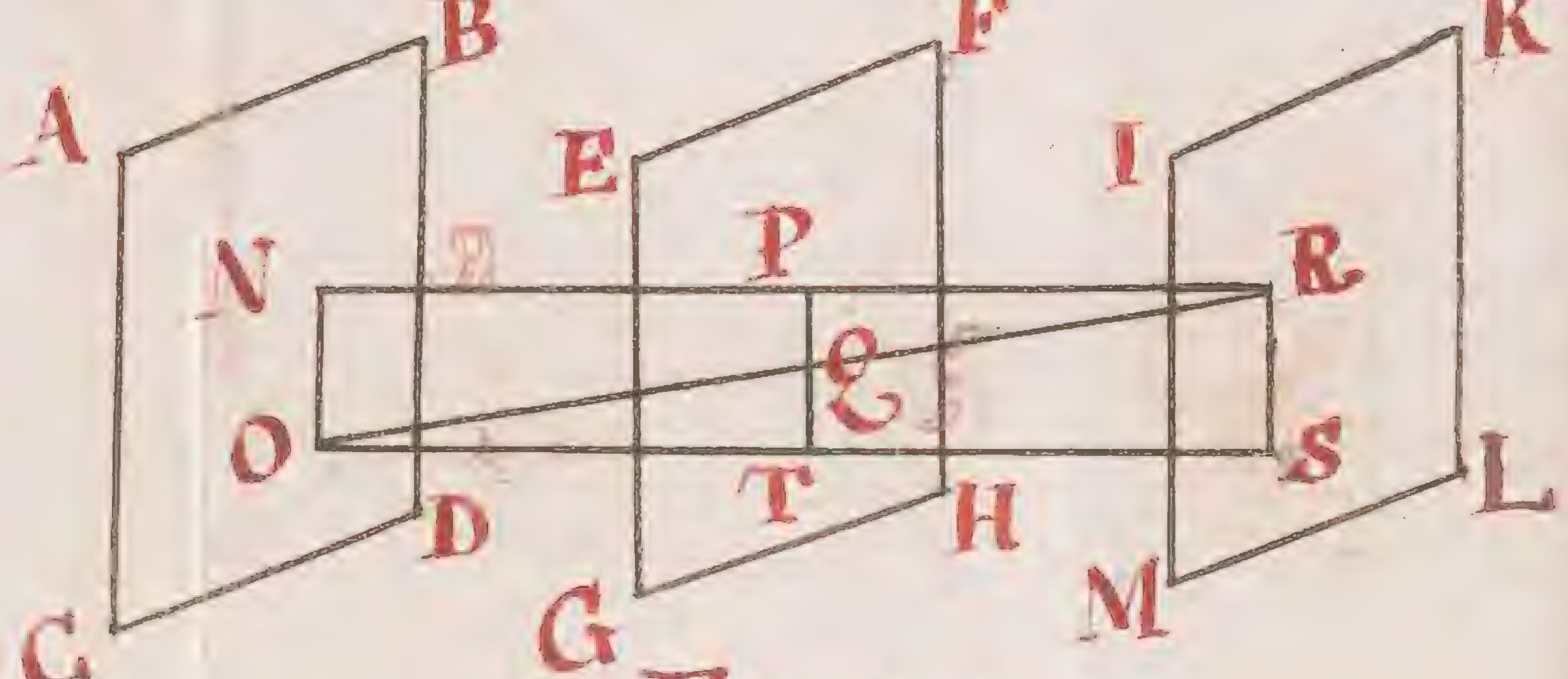


Fig: 189.

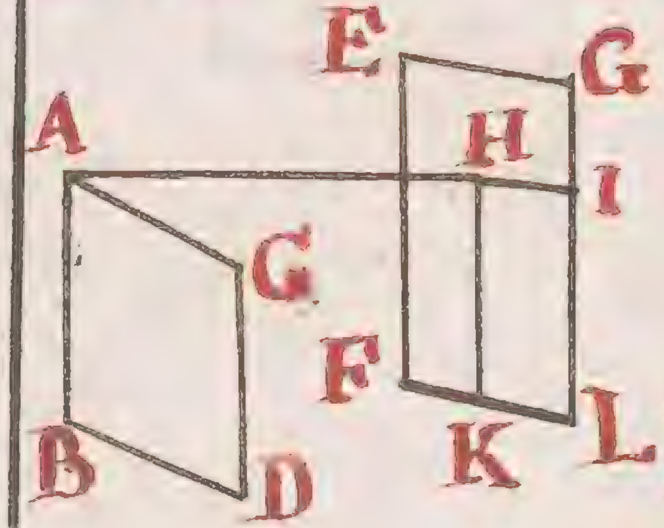
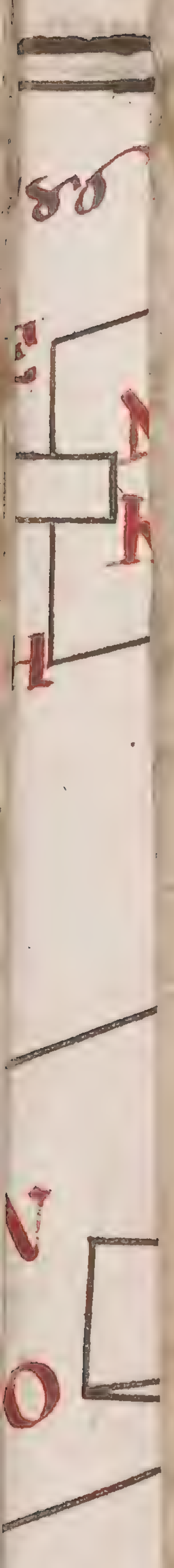


Fig: 188.



MSS
266B
RB
NMAH

Fontana, J.
Elementa
geometriae tum
planae, tum solidae.

Manuscript.
1756.

SMITHSONIAN
SEP 13 1983
LIBRARIES

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 00331201 4
nmahrb MSS266 B
Elementa geometriae tum planae, tum soli